UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA UND N. HOFREITER
WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

61. BAND, 3. HEFT
Mit 8 TEXTABBILDUNGEN
AUSGEGEBEN IM JUNI 1957

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1957

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

61. Band/3. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Erwe, F. Einheitsfunktionenspalten 173

Nöbauer, W. Über eine Klasse von $\mathfrak{M}$-Untergruppen 195

Gröbner, W. Kontinuierliche Transformationsgruppen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten 209

Bereis, R. und **H. Brauner.** Über koaxiale euklidische Schraubungen . . . 225

Eweida, M. T. Berechnung einiger unendlicher Integrale 246

Buchbesprechungen 250

Einheitsfunktionenspalten

Von

Friedhelm Erwe, Bonn

Mit 1 Textabbildung

(*Eingegangen am 16. November 1956*)

In der Theorie der unimodular beschränkten Funktionen, d. h. derjenigen in $|z| < 1$ holomorphen Funktionen $f(z)$, für die dort $|f(z)| \leq 1$ gilt, spielen die sog. *Einheitsfunktionen* (siehe *Carathéodory* [3]) eine hervorragende Rolle. Das sind solche unimodular beschränkten Funktionen, die in $|z| \leq 1$ definiert und stetig sind, und die auf $|z| = 1$ überall den Betrag 1 haben. Sie treten u. a. bei Koeffizientenproblem und Verzerrungssätzen als Schrankenfunktionen auf, und Folgen von Einheitsfunktionen können zur Approximation beliebiger unimodular beschränkter Funktionen dienen.

Die Theorie der beschränkten Funktionensysteme, wie sie in der Arbeit [4] von *E. Peschl* und Verf. in Angriff genommen wurde, läßt nun eine analoge Begriffsbildung zu. Der Behandlung des sich daran anknüpfenden Fragenkomplexes ist die vorliegende Arbeit gewidmet. Bezüglich des Kalküls wird in Einzelheiten auf die genannte Arbeit [4] verwiesen. Es sei hier nur kurz folgendes gesagt: Es wurde konsequent der Matrizenkalkül verwandt, insbesondere ein Funktionensystem $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z)$ als Spalte

$$\mathfrak{f}(z) = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}$$

geschrieben und deshalb Funktionenspalte genannt. Ihr absoluter Betrag $|\mathfrak{f}(z)|$ (≥ 0) war durch

$$|\mathfrak{f}(z)|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu(z)|^2 = \overline{\widetilde{\mathfrak{f}(z)}}\,\mathfrak{f}(z)^1$$

[1] Der Übergang von einer Matrix zur Matrix der konjugierten Glieder wird durch einen Querstrich $\bar{}$, der Übergang zur transponierten Matrix durch eine Schlangenlinie $\tilde{}$ ausgedrückt.

definiert, also mittels der unitären Norm im Raume von n komplexen Dimensionen.

Eine Funktionenspalte $\mathfrak{f}(z)$ heißt unimodular beschränkt (oder kurz: *beschränkt*), wenn $\mathfrak{f}(z)$ in $|z| < 1$ holomorph (d. h. alle Glieder sind holomorph; entsprechend sind meromorphe, rationale, konstante, stetige Funktionenspalten — und später auch Funktionenmatrizen — zu verstehen) ist, und wenn

$$|\mathfrak{f}(z)| \leq 1 \qquad \text{in } |z| < 1 \tag{1}$$

gilt. Da das Maximumprinzip gilt, tritt in (1) das Gleichheitszeichen nicht ein, außer wenn $\mathfrak{f}(z)$ eine Konstante ist.

Um die Unterschiede und spezifischen Schwierigkeiten gegenüber dem klassischen Fall $n = 1$ deutlicher hervortreten zu lassen, schicken wir eine Behandlung der Einheitsfunktionen voraus.

Nach dem *Schwarz*schen Spiegelungsprinzip läßt sich eine Einheitsfunktion in die ganze abgeschlossene Ebene meromorph fortsetzen, ist also eine rationale Funktion. Der Grad des Zählerpolynoms (Zähler- und Nennerpolynom werden teilerfremd gewählt) wird als der Grad der Einheitsfunktion bezeichnet. Der *Schur*sche Algorithmus gestattet nun eine sukzessive Graderniedrigung, die zu einer Einheitsfunktion nullten Grades führt. Eine solche ist aber eine Konstante ε (natürlich $|\varepsilon| = 1$). So gewinnt man in

$$f_0(z) = \varepsilon \qquad (|\varepsilon| = 1)$$

$$f_{\nu+1}(z) = \frac{z f_\nu(z) + c_\nu}{1 + \bar{c}_\nu z f_\nu(z)} \quad (|c_\nu| < 1) \qquad \text{für } \nu \geq 0$$

eine Rekursionsformel zur Gewinnung aller Einheitsfunktionen. $f_k(z)$ hat dabei stets den Grad k.

Zu einer anderen Charakterisierung gelangt man auf dem von *Carathéodory* [3] dargestellten Weg. Eine Einheitsfunktion $f(z)$ hat in $|z| < 1$ nur endlich viele Nullstellen, etwa $a_1, a_2, \ldots a_k$ (mehrfache Nullstellen seien dabei so oft aufgezählt, als es ihrer Vielfachheit entspricht). Dann ist auch $f(z) \prod_{\nu=1}^{k} \frac{1 - \bar{a}_\nu z}{z - a_\nu}$ (im Falle $k = 0$ ist wie üblich $\prod_{\nu=1}^{k} \ldots = 1$ zu setzen) eine Einheitsfunktion. Diese hat in $|z| < 1$ keine Nullstelle, ist also nach dem Satz vom Minimum eine Konstante η, und zwar von Betrage 1:

$$f(z) = \eta \prod_{\nu=1}^{k} \frac{z - a_\nu}{1 - \bar{a}_\nu z} \qquad (|\eta| = 1, |a_\nu| < 1). \tag{2}$$

Daß umgekehrt jede solche Funktion Einheitsfunktion ist (und zwar hat (2) den Grad k), ist klar.

Während der erste Beweis bei Benutzung des *Schwarz*schen Spiegelungsprinzips von der Stetigkeit der Einheitsfunktion in $|z| \leq 1$ Gebrauch machte, ist das beim zweiten Beweis nicht der Fall. Man kommt vielmehr mit der geringeren Voraussetzung aus, alle Randwerte von $f(z)$ seien vom Betrage 1, und der Beweis bleibt wörtlich derselbe. Diese umfassendere Definition der Einheitsfunktionen legen wir bei der Verallgemeinerung auf Systeme zugrunde.

Die Funktionenspalte $\mathfrak{f}(z)$ heißt eine *Einheitsfunktionenspalte*, abgekürzt: EFSp, wenn sie in $|z| < 1$ holomorph ist und lauter Randwerte vom Betrag 1 hat, d. h. wenn $|\mathfrak{f}(z)| \to 1$ strebt für $|z| \to 1$. Nach dem Maximumprinzip ist sofort klar, daß jede EFSp beschränkt ist.

Die Menge der EFSpn mit n Gliedern wollen wir mit $\mathfrak{E}^n$ bezeichnen. Uns werden insbesondere die folgenden Unterklassen interessieren:
$\mathfrak{E}^n_{\mathfrak{st}}$: Die Menge der in $|z| \leq 1$ stetigen EFSpn aus $\mathfrak{E}^n$.
$\mathfrak{E}^n_{\mathfrak{h}}$: Die Menge der in $|z| \leq 1$ holomorphen EFSpn aus $\mathfrak{E}^n$.
$\mathfrak{E}^n_{\mathfrak{r}}$: Die Menge der in der ganzen abgeschlossenen Ebene meromorphen (also rationalen) EFSpn aus $\mathfrak{E}^n$.

Für $n = 1$ fällt jede dieser Klassen mit $\mathfrak{E}^n$ zusammen, wie wir wissen. Für $n > 1$ ist das keineswegs der Fall, ja, wir werden sehen, daß sie alle untereinander und von $\mathfrak{E}^n$ verschieden sind.

Die beiden Beweise zur Charakterisierung der Einheitsfunktionen sind für die Verallgemeinerung natürlich nicht gangbar. Für Funktionenspalten haben wir kein Spiegelungsprinzip und können deshalb nicht wie oben die Rationalität der EFSpn erschließen. Es sind ja auch für $n > 1$ keineswegs alle EFSpn rational, wie bereits erwähnt wurde. Zur genaueren Untersuchung der rationalen unter ihnen, also der Klasse $\mathfrak{E}^n_{\mathfrak{r}}$, wird uns der zweite Teil jenes Beweises aber doch noch nützlich sein. Den *Schur*schen Algorithmus gibt es nämlich auch für Funktionenspalten.

Der erste Teil des zweiten Beweises läßt sich für Funktionenspalten übernehmen. Eine EFSp hat in $|z| < 1$ nur endlich viele Nullstellen[2], so daß man durch Division durch eine geeignete Einheitsfunktion zu

[2] z_0 heißt Nullstelle einer in z_0 holomorphen Funktionenspalte $\mathfrak{f}(z)$, wenn $|\mathfrak{f}(z_0)| = 0$ ist, d. h. wenn $\mathfrak{f}(z_0)$ die Nullspalte $\mathfrak{o}$ ist oder wenn $\frac{1}{z - z_0}\,\mathfrak{f}(z)$ in z_0 holomorph ist. Auch der Begriff der Ordnung einer Nullstelle überträgt sich.

einer EFSp gelangt, die in $|z| < 1$ ungleich $\mathfrak{o}$ ist. Man kann aber für $n > 1$ daraus nicht die Konstanz erschließen, da ein solcher Satz vom Minimum nicht gilt, und wie das Beispiel der EFSp $\mathfrak{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ z\end{pmatrix}$ zeigt.

Die Menge der in $|z| < 1$ holomorphen Funktionenspalten mit in $|z| \leq 1$ stetigem und auf $|z| = 1$ nicht verschwindendem Absolutbetrag wollen wir kurz $\mathfrak{H}^n$ nennen, wo n die Anzahl der Komponenten angibt. Zwei Funktionenspalten $\mathfrak{f}(z), \mathfrak{g}(z) \in \mathfrak{H}^n$ heißen äquivalent, wenn eine Funktion $a(z) \in \mathfrak{H}^1$ existiert, die auch in $|z| < 1$ von 0 verschieden ist, und für die

$$\mathfrak{g}(z) = a(z)\,\mathfrak{f}(z) \qquad \text{in } |z| \leq 1$$

gilt.

Satz 1: Zu jeder Funktionenspalte aus $\mathfrak{H}^n$ gibt es eine und im wesentlichen (d. h. bis auf konstante Faktoren vom Betrage 1) nur eine ihr äquivalente EFSp.

Beweis: Sei $\mathfrak{f}(z) \in \mathfrak{H}^n$. Mit der Lösung $u(z)$ der potentialtheoretischen Randwertaufgabe (für den Kreis $|z| \leq 1$)

$$u(z) = -\log|\mathfrak{f}(z)| \qquad \text{auf } |z| = 1$$

und einer zu $u(z)$ konjugierten Potentialfunktion $v(z)$ haben wir in

$$a(z) = e^{u(z)+iv(z)}$$

eine Funktion gefunden, so daß

$$\mathfrak{g}(z) = a(z)\,\mathfrak{f}(z)$$

EFSp ist. Daß zwei äquivalente EFSpn sich nur durch einen Faktor vom Betrag 1 unterscheiden, ist trivial nach dem, was wir über Einheitsfunktionen wissen.

In diesem Satze haben wir eine Charakterisierung der EFSpn, die aber einige weitere Fragen nahelegt, denen wir nachgehen wollen. Zunächst liegt jetzt die Existenz nicht-rationaler EFSpn für $n > 1$ auf der Hand, denn wählen wir $\mathfrak{f}(z) \in \mathfrak{H}^n$ so, daß der Quotient zweier Komponenten nicht-rational ist, so kann keine zu $\mathfrak{f}(z)$ äquivalente Funktionenspalte rational sein.

$\mathfrak{H}^n$ ist eine Menge von n weitgehend willkürlichen in $|z| < 1$ holomorphen Funktionen. Durch die Äquivalenzklassenbildung kann man sich eine der Funktionen normiert denken, und es bleiben $n - 1$ weitgehend willkürliche Funktionen, von denen die Äquivalenzklassen abhängen, die also auch in die Menge $\mathfrak{E}^n$ der EFSpn eingehen. Ohne diese Aussage präzisieren zu wollen, werden wir hier auf die Frage geführt,

inwieweit die Vorgabe von $n-1$ Gliedern einer EFSp aus $\mathfrak{E}^n$ willkürlich ist. Seien $f_2(z), \ldots f_n(z)$ diese vorgegebenen Funktionen, die in $|z|<1$ holomorph sind, und für die natürlich

$$|f_2(z)|^2+\ldots+|f_n(z)|^2\leq 1 \text{ in } |z|<1$$

gelten soll. Es sind aber noch weitere Einschränkungen notwendig. Nach dem Satze von *Fatou* existieren die Grenzwerte von $|f_2(z)|^2+\ldots+|f_n(z)|^2$ bei radialer Annäherung an die Punkte des Einheitskreises $|z|=1$ in einer Menge vom Maß 2π. Wenn nicht $|f_2(z)|^2+\ldots+|f_n(z)|^2\equiv 1$ ist, so müssen diese Grenzwerte aber auch in einer Menge vom Maß 2π kleiner als 1 sein, wie wir dem Satz von *Rieß* (siehe *Bieberbach* [2]) entnehmen können. Ist z. B. $w=f_2(z)$ eine Funktion, die $|z|<1$ auf den Halbkreis $|w|<1, \Im w>0$ konform abbildet, während $f_3(z)=\ldots=f_n(z)\equiv 0$ ist, so gibt es keine Funktion $f_1(z)$, so daß $f_1(z),\ldots f_n(z)$ die Komponenten einer EFSp sind. — Handliche notwendige und hinreichende Bedingungen für $f_2(z),\ldots f_n(z)$ anzugeben, ist vielleicht garnicht so einfach. Hinreichend ist jedenfalls ,wenn $1-|f_2(z)|^2-\ldots-|f_n(z)|^2$ in $|z|\leq 1$ stetig und >0 ist. Dann liefert $f_1(z)=e^{u_1(z)+iv_1(z)}$ eine Lösung der Frage, wenn $u_1(z)$ eine die Randwertaufgabe

$$u_1(z)=\tfrac{1}{2}\log(1-|f_2(z)|^2-\ldots-|f_n(z)|^2) \text{ auf } |z|=1$$

erfüllende in $|z|<1$ harmonische Funktion ist und $v_1(z)$ zu $u_1(z)$ konjugiert ist.

Wählen wir hierbei wenigstens eine der Funktionen $f_2(z), \ldots f_n(z)$ so, daß sie nicht stetig ergänzbar in den abgeschlossenen Einheitskreis $|z|\leq 1$ ist, so haben wir die Menge $\mathfrak{E}^n_{\mathfrak{ft}}$ der in $|z|\leq 1$ stetigen EFSpn als eine *echte* Teilmenge der Menge $\mathfrak{E}^n$ aller EFSpn nachgewiesen. Daß aber eine solche Wahl möglich ist, zeigt das Beispiel der konformen Abbildung $w=f(z)$ von $|z|<1$ auf einen Kreis mit dem Radius $r<1$, der längs der radialen Strecke $0\leq w<r$ und längs der unendlich vielen Kreisbögen

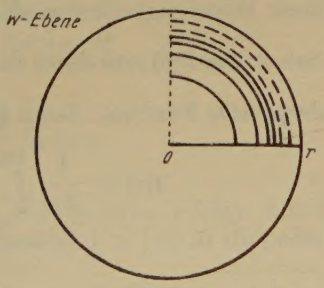

Abb. 1

$$w=\frac{k-1}{k}re^{i\varphi} \qquad \left(0<\varphi\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

$(k=2, 3, 4, \ldots)$ aufgeschlitzt ist, wie es nebenstehende Abb. 1 veranschaulicht. Das Wesentliche an diesem Beispiel ist, daß wenigstens

ein nicht-erreichbares Randstück des Bildgebietes vorhanden ist (dadurch wird die stetige Ergänzbarkeit von $f(z)$ vermieden), und daß jedes solche Randstück ein Kreisbogen um den Nullpunkt ist (dadurch wird die stetige Ergänzbarkeit von $|f(z)|$ erzwungen).

Zur Charakterisierung der Menge $\mathfrak{E}_{\mathfrak{ft}}^n$ wird man versuchen, den Satz 1 heranzuziehen. Es erhebt sich hier aber die Frage, ob die zu einer in $|z| \leq 1$ stetigen Funktionenspalte $\mathfrak{H}^n$ äquivalente EFSp zu $\mathfrak{E}_{\mathfrak{ft}}^n$ gehört. Die positive Beantwortung dieser Frage scheiterte daran, daß die Stetigkeit der im Beweis zu Satz 1 auftretenden Funktion $a(z)$ bei in $|z| \leq 1$ stetigem $\mathfrak{f}(z)$ nicht garantiert werden konnte (vgl. hierzu *Behnke-Sommer* [1], S. 164). Es konnte aber auch kein Gegenbeispiel gefunden werden, um die Frage im negativen Sinne zu beantworten.

Die gleichen Schwierigkeiten bestanden bei der Frage, ob die Funktion $f_1(z)$, die $n-1$ in $|z| < 1$ holomorphe, in $|z| \leq 1$ stetige Funktionen $f_2(z), \ldots f_n(z)$ für die

$$|f_2(z)|^2 + \ldots + |f_n(z)|^2 < 1 \qquad \text{in } |z| \leq 1$$

gilt, zu einer EFSp ergänzt, in $|z| \leq 1$ stetig ist.

Die Behandlung der Klasse $\mathfrak{E}_{\mathfrak{ft}}^n$ bleibt also noch völlig unbefriedigend. Man sieht, wie gut wir daran taten, den Begriff der EFSp in jener weiten Fassung zu geben, die eine Behandlung ermöglichte, die uns bei dieser engeren Fassung als Funktionenmenge $\mathfrak{E}_{\mathfrak{ft}}^n$ bisher versagt bleibt.

Bei der Unterklasse $\mathfrak{E}_{\mathfrak{h}}^n$ der in $|z| \leq 1$ holomorphen EFSpn bestehen diese Schwierigkeiten wiederum nicht. Vorbereitend beweisen wir den

Satz 2: Sei $F(z)$ eine durch die Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} z^\mu \bar{z}^\nu$ [3] in $|z| < r\,(r > 1)$ dargestellte Funktion. Dann ist die durch

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \bar{\zeta} z}{1 - \bar{\zeta} z} F(\zeta) dt \qquad (\zeta = e^{it})^{4} \tag{3}$$

jedenfalls in $|z| < 1$ definierte Funktion in $|z| < r$ holomorph.

---

[3] Jede solche Doppelreihe besitzt einen Konvergenzradius R $(0 \leqq R \leqq \infty)$ derart, daß sie in $|z| < R$ absolut (und in jedem kompakten Teilbereich von $|z| < R$ gleichmäßig) konvergiert, während keine Umordnung in eine Einfachreihe in einem Punkt aus $|z| > R$ konvergiert. Die durch sie dargestellte Funktion ist im Konvergenzkreis $|z| < R$ stetig (wegen der gleichmäßigen Konvergenz).

[4] Bei auf $|z| = 1$ reellem $F(z)$ ist $\Re f(z)$ die Lösung der Randwertaufgabe

$$\Re f(z) = F(z) \qquad \text{auf } |z| = 1$$

der Potentialtheorie, und $\Im f(z)$ ist diejenige $\Re f(z)$ konjugierte Potentialfunktion, die in $z = 0$ verschwindet (*Behnke-Sommer* [1], S. 160).

Beweis: Aus (3) folgt wegen

$$\frac{1+\bar{\zeta}z}{1-\bar{\zeta}z} = 1 + 2\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \bar{\zeta}^{\varkappa} z^{\varkappa}$$

die jedenfalls in $|z| < 1$ gültige Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_{\varkappa} z^{\varkappa}$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\zeta)dt, \quad a_{\varkappa} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \bar{\zeta}^{\varkappa} F(\zeta)dt \quad (\varkappa \geq 1).$$

Für $\varkappa \geq 1$ ist also

$$a_{\varkappa} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \bar{\zeta}^{\varkappa} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\zeta^{\mu}\bar{\zeta}^{\nu}\, dt,$$

und da die im Integranden auftretende Reihe auf dem Integrationsintervall gleichmäßig konvergiert, ist

$$a_{\varkappa} = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \zeta^{\mu}\bar{\zeta}^{\nu+\varkappa}\, dt$$

$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \zeta^{\mu-\nu-\varkappa}\, dt.$$

Wegen

$$\int_0^{2\pi} \zeta^{\lambda}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \neq 0 \\ 2\pi & \text{für } \lambda = 0 \end{cases}$$

ist also

$$a_{\varkappa} = 2\sum_{\substack{\mu,\nu=0 \\ \mu-\nu=\varkappa}}^{\infty} a_{\mu\nu} = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+\varkappa,\,\nu}.$$

Aus der absoluten Konvergenz von $\sum a_{\mu\nu}z^{\mu}\bar{z}^{\nu}$ in $|z| < r$ folgt, daß die Reihe

$$\sum_{\substack{\mu,\nu=0 \\ \mu>\nu}}^{\infty} |a_{\mu\nu}|\,|z|^{\mu}|z|^{\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\nu+\varkappa,\,\nu}|\,|z|^{2\nu+\varkappa}$$

in $|z| < r$ konvergiert, und damit ist in der Reihe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \left(2\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\nu+\varkappa,\,\nu}|\,|z|^{2\nu}\right)|z|^{\varkappa}$$

in $1 \leq |z| < r$ eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum a_{\varkappa}z^{\varkappa}$ gefunden, w. z. b. w.

Jetzt können wir die folgenden beiden Sätze beweisen:

Satz 3: Die gemäß Satz 1 zu einer in $|z| \leq 1$ *holomorphen Funktionenspalte aus* $\mathfrak{H}^n$ *äquivalente EFSp ist in* $|z| \leq 1$ *holomorph, gehört also zu* $\mathfrak{E}_0^n$.

Satz 4: Je $n-1$ *in* $|z| \leq 1$ *holomorphe Funktionen* $f_2(z), \ldots f_n(z)$, *für die*

$$|f_2(z)|^2 + \ldots + |f_n(z)|^2 < 1 \qquad \text{in } |z| \leq 1 \tag{4}$$

gilt, lassen sich durch eine Funktion $f_1(z)$ *zu einer EFSp aus* $\mathfrak{E}_0^n$ *ergänzen.*

Bemerkung: Wenn $f_1^*(z)$ eine solche Funktion ist, die $f_2(z), \ldots f_n(z)$ zu einer EFSp ergänzt, die aber in $|z| \leq 1$ von 0 verschieden ist, so ist die Menge aller solcher Funktionen durch

$$f_1(z) = g(z)\, f_1^*(z)$$

beschrieben, wo $g(z)$ die Menge der Einheitsfunktionen durchläuft.

Beweis zu Satz 3: Als Funktionenspalte aus $\mathfrak{H}^n$ hat $\mathfrak{f}(z)$ nur endlich viele Nullstellen in $|z| < 1$, etwa $z_1, z_2, \ldots z_k$ (mehrfache Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit aufgezählt). Wir dividieren $\mathfrak{f}(z)$ durch die Einheitsfunktion

$$g(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \cdot \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z} \cdots \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}$$

und erhalten so eine Funktionenspalte aus $\mathfrak{H}^n$, die in einem Kreise $|z| \leq r$ $(r > 1)$ holomorph und von 0 verschieden ist. Sie ist dort auch beschränkt, etwa

$$\left| \frac{\mathfrak{f}(z)}{g(z)} \right| < M \qquad \text{in } |z| \leq r.$$

Dann ist $\mathfrak{f}_0(z) = \dfrac{\mathfrak{f}(z)}{M g(z)}$ eine in $|z| \leq r$ holomorphe Funktionenspalte, für die dort gilt:

$$0 < |\mathfrak{f}_0(z)| < 1.$$

Diese Eigenschaften garantieren dafür, daß die Funktion

$$\log |\mathfrak{f}_0(z)| = {}^1\!/_2 \log (1 - (1 - |\mathfrak{f}_0(z)|^2))$$

in $|z| \leq r$ eine Reihenentwicklung gestattet, wie sie der Satz 2 für $F(z) = \log |\mathfrak{f}_0(z)|$ voraussetzt. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \bar{\zeta} z}{1 - \bar{\zeta} z} \log |\mathfrak{f}_0(\zeta)|\, dt \qquad (\zeta = e^{it})$$

ist also in $|z| < r$ holomorph, und es gilt:

$$|e^{f(z)}| = e^{\Re f(z)} = |\mathfrak{f}_0(z)| \qquad \text{auf } |z| = 1.$$

Es ist also $\frac{1}{M} e^{-f(z)} \mathfrak{f}(z)$ eine in $|z| < r$ holomorphe EFSp, w. z. b. w.

Der Beweis zu Satz 4 erfordert nicht so viel Umstände, bevor der Satz 2 angewendet werden kann. Die Voraussetzung (4) und die Holomorphie von $f_2(z), \ldots f_n(z)$ in $|z| \leq 1$ garantieren sofort die Existenz einer Zahl $r > 1$, so daß

$$F(z) = {}^1/_2 \log (1 - |f_2(z)|^2 - \ldots - |f_n(z)|^2)$$

die Voraussetzung von Satz 2 erfüllt. Man gewinnt also eine in $|z| < r$ holomorphe Funktion $f(z)$, so daß

$$|e^{f(z)}|^2 = e^{2\Re f(z)} = 1 - |f_2(z)|^2 - \ldots - |f_n(z)|^2 \text{ auf } |z| = 1$$

ist, und hat in $f_1(z) = e^{f(z)}$ eine gewünschte Funktion gefunden, die in $|z| \leq 1$ nicht verschwindet.

Satz 4 gibt keine genaue Charakterisierung der Menge $\mathfrak{E}_0^n$, denn es gibt Funktionen $f_2(z), \ldots f_n(z)$, die (4) nicht erfüllen und sich doch durch Hinzunahme einer Funktion $f_1(z)$ zu einer EFSp aus $\mathfrak{E}_0^n$ ergänzen lassen, für $n = 2$ z. B. $f_2(z) = {}^1/_2(1 - z)$, wo etwa $f_1(z) = {}^1/_2(1 + z)$ gewählt wird. In diesem Beispiel überführt die Transformation mittels der unitären Matrix $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ die EFSp $\begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z \\ 1-z \end{pmatrix}$ aber in eine EFSp, die gemäß Satz 4 gewonnen werden kann, nämlich in $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$. Es stellt sich nun die Frage, ob man so allgemein zum Ziel kommt, d. h. ob sich jede EFSp $\mathfrak{f}(z)$ aus $\mathfrak{E}_0^n$ durch Multiplikation mit einer unitären Matrix in eine solche EFSp transformieren läßt, deren erste Komponente auf $|z| = 1$ von 0 verschieden ist. Die Frage läßt sich bejahen. Wir brauchen bloß eine Spalte $\mathfrak{a}$ zu finden, so daß

$$\tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{f}(z) \neq 0 \text{ auf } |z| = 1$$

ist, und dabei kann noch o. B. d. A. $|\mathfrak{a}| = 1$ angenommen werden. Die Zeile $\tilde{\mathfrak{a}}$ läßt sich nämlich durch Hinzunahme von $n - 1$ weiteren Zeilen zu einer unitären Matrix A ergänzen, deren erste Zeile $\tilde{\mathfrak{a}}$ ist.

Der Beweis der Existenz einer solchen Spalte $\mathfrak{a}$ kann durch Induktion über n geführt werden. Für $n = 1$ ist die Aussage eine Trivialität. Sei sie nun für den Index $n - 1 \geq 1$ bewiesen. Wenn $f_1(z) \equiv 0$ ist, so ist die Aussage nach Induktionsvoraussetzung richtig. Sei nun $f_1(z) \not\equiv 0$. Die

gemeinsamen Nullstellen von $f_2(z), \ldots f_n(z)$ auf $|z| = 1$ seien genau die Nullstellen des Polynoms $p(z)$. Wir setzen

$$f_\nu(z) = p(z)\, g_\nu(z) \qquad (\nu = 2, \ldots n).$$

Dann ist $\begin{pmatrix} g_2(z) \\ \vdots \\ g_n(z) \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}^{n-1}$, und nach Satz 3 und Induktionsvoraussetzung gibt es Zahlen $a_2, \ldots a_n$, so daß

$$a_2\, g_2(z) + \ldots + a_n\, g_n(z) \neq 0 \text{ auf } |z| = 1$$

ist. Die in $|z| \leq 1$ meromorphe Funktion $\dfrac{a_2 f_2(z) + \ldots + a_n f_n(z)}{f_1(z)}$ läßt auf $|z| = 1$ unendlich viele komplexe Zahlen aus. Eine davon werde mit $-a_1$ bezeichnet. Aus

$$\frac{a_2 f_2(z) + \ldots + a_n f_n(z)}{f_1(z)} \neq -a_1 \text{ auf } |z| = 1 \tag{5}$$

folgt nun aber, daß

$$a_2 f_2(z) + \ldots + a_n f_n(z) \neq -a_1 f_1(z) \text{ auf } |z| = 1 \tag{6}$$

ist. Schwierigkeiten beim Übergang von (5) zu (6) könnten nämlich nur die auf $|z| = 1$ gelegenen Nullstellen von $f_1(z)$ bereiten. Diese können aber nicht zugleich Nullstellen von

$$a_2 f_2(z) + \ldots + a_n f_n(z) = p(z)\,(a_2 g_2(z) + \ldots + a_n g_n(z))$$

sein, denn $a_2 g_2(z) + \ldots + a_n g_n(z)$ besitzt auf $|z| = 1$ gar keine Nullstellen und $p(z)$ hat mit $f_1(z)$ keine Nullstellen gemeinsam. Damit haben wir den *Satz 5: Zu jeder EFSp* $\mathfrak{w} = \mathfrak{f}(z) \in \mathfrak{E}_\mathfrak{v}^n$ *gibt es eine unitäre Drehung des* $\mathfrak{w}$*-Raumes (gegeben durch eine unitäre Matrix* A*), so daß die transformierte EFSp* $A\mathfrak{f}(z)$ *eine auf* $|z| = 1$ *nicht verschwindende erste Komponente besitzt. Mit anderen Worten:* $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}^n$ *ist gleich der Menge derjenigen EFSpn, die man aus den gemäß Satz 4 gewonnenen EFSpn durch unitäre Drehungen erhält.*

Ob ein entsprechender Satz für die Menge $\mathfrak{E}^n$ schon existiert, ist fraglich. Mit den unitären Drehungen als Normierungsmittel wird man dann sicherlich nicht mehr auskommen, aber als ein wirksameres Normierungsmittel steht uns ja die umfassendere Menge der analytischen Automorphismen der Einheitshyperkugel $|\mathfrak{w}| < 1$ des n-dimensionalen komplexen $\mathfrak{w}$-Raumes zur Verfügung. Die Gesamtheit dieser Automorphismen ist durch

$$\mathfrak{w} \leftrightarrow A\,\Gamma(\mathfrak{a})\,\frac{\mathfrak{w} - \mathfrak{a}}{1 - \tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{w}},$$

A unitäre Matrix,

$$|\mathfrak{a}|<1,\ \Gamma(\mathfrak{a})=\frac{1}{1+\sqrt{1-|\mathfrak{a}|^2}}\,\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{a}}+\sqrt{1-|\mathfrak{a}|^2}\,E$$

(E Einheitsmatrix) beschrieben (siehe [6], [4]). Mit $\mathfrak{f}(z)$ ist auch die mittel eines solchen Automorphismus transformierte Funktionsspalte

$$A\,\Gamma(\mathfrak{a})\,\frac{\mathfrak{f}(z)-\mathfrak{a}}{1-\tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{f}(z)}$$

eine EFSp.

Durch Satz 4 ist die Frage, ob $\mathfrak{E}_{\mathfrak{h}}^n$ eine echte Obermenge von $\mathfrak{E}_{\mathfrak{r}}^n$ darstellt, in positivem Sinne beantwortet, denn man braucht ja bloß eine der Funktionen $f_2(z),\ldots f_n(z)$ als eine nicht-rationale Funktion zu wählen, während die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind. Das ist natürlich möglich. — Es ist bis jetzt aber noch nicht die Frage behandelt worden, ob auch $\mathfrak{E}_{\mathfrak{ft}}^n$ eine echte Obermenge von $\mathfrak{E}_{\mathfrak{h}}^n$ ist. Die Antwort ist auch positiv, wie wir nun zeigen wollen.

Sei $G(t)$ in $0\leq t\leq 2\pi$ stetig und $G(0)=G(2\pi)$. Die Lösung der Randwertaufgabe

$$\Re f(e^{it})=G(t)\qquad \text{in } 0\leq t\leq 2\pi$$

wird gemäß früher benutzten Formeln durch

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}\,G(t)dt=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\alpha_\varkappa z^\varkappa,$$

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(t)dt,\ \alpha_\varkappa=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i\varkappa t}G(t)dt\quad(\varkappa\geq 1)\tag{7}$$

geliefert. Zwar ist $\Re f(z)$ in $|z|\leq 1$ stetig, aber $f(z)$ selbst braucht dort nicht stetig zu sein. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß $G(t)$ zweimal stetig differenzierbar ist, ist aber auch $f(z)$ in $|z|\leq 1$ stetig. Dann läßt sich nämlich aus (7) durch zweimalige partielle Integration gewinnen ($\varkappa\geq 1$):

$$\alpha_\varkappa=\frac{1}{\pi(i\varkappa)^2}\left(\left[-e^{-i\varkappa t}\frac{dG(t)}{dt}\right]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}e^{-i\varkappa t}\frac{d^2G(t)}{dt^2}\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{\pi\varkappa^2}\left(\left[\frac{dG(t)}{dt}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}e^{-i\varkappa t}\frac{d^2G(t)}{dt^2}\,dt\right),$$

$$|\alpha_\varkappa|\leq\frac{1}{\pi\varkappa^2}\left(\left|\left[\frac{dG(t)}{dt}\right]_0^{2\pi}\right|+\int_0^{2\pi}\left|\frac{d^2G(t)}{dt^2}\right|dt\right).$$

Die Potenzreihe besitzt also in $|z| \leq 1$ eine konvergente Majorante, stellt demnach eine dort stetige Funktion dar.

Wählen wir nun (es genügt, den Fall $n = 2$ zu behandeln) $f_2(z)$ in $|z| < 1$ holomorph, in $|z| \leq 1$ stetig, aber nicht holomorph, während

$$|f_2(z)| < 1 \qquad \text{auf } |z| = 1$$

ist. Garantieren wir jetzt noch, daß $|f_2(e^{it})|^2$ als Funktion von t in $0 \leq t \leq 2\pi$ zweimal stetig differenzierbar ist, also auch $\log(1 - |f_2(e^{it})|^2)$ diese Eigenschaft hat, so ist die Funktion $f_1(z)$, die $f_2(z)$ zu einer EFSp ergänzt, in $|z| \leq 1$ stetig. Eine solche Wahl von $f_2(z)$ ist möglich, wie das Beispiel

$$f_2(z) = a\sqrt{1-z}, \quad 0 < |a| < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

zeigt (die Wurzel ist in ihrem Vorzeichen in $|z| \leq 1$ eindeutig festgelegt, wenn etwa $\sqrt{1} = +1$ gesetzt wird).

Abschließend zu diesen Ausführungen über $\mathfrak{E}_n^n$ soll die Frage nach den Holomorphie- oder Meromorphiegebieten von EFSpn gestellt werden. Für $n = 1$ ist die abgeschlossene Ebene das einzige Meromorphiegebiet: Jede Einheitsfunktion ist in die abgeschlossene Ebene meromorph fortsetzbar. Für $n > 1$ läßt sich aus dem Beweis zu Satz 4 die Aussage gewinnen, daß alle Kreise um den Nullpunkt mit einem Radius $r > 1$ Holomorphiegebiete von EFSpn sind. Jener Beweis enthält nämlich über Satz 4 hinaus die Aussage:

Satz 4a: Je $n-1$ in $|z| < r$ $(r > 1)$ holomorphe Funktionen $f_2(z), \ldots f_n(z)$, für die

$$|f_2(z)|^2 + \ldots + |f_n(z)|^2 < 1 \qquad \text{in } |z| < r$$

gilt, lassen sich durch eine Funktion $f_1(z)$ zu einer in $|z| < r$ holomorphen EFSp ergänzen.

Wir können uns auf $n = 2$ beschränken. Wir beweisen, daß es eine die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllende Funktion $f_2(z)$ gibt, die über $|z| < r$ hinaus nicht fortsetzbar ist. Dann haben wir in $\begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix}$ eine in $|z| < r$ holomorphe und darüber hinaus nicht fortsetzbare EFSp. Man kann

$$f_2(rz) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{|z_\nu|}{z_\nu} \frac{z + z_\nu}{1 + \bar{z}_\nu z} \right)$$

setzen. Für eine genügend rasch gegen 1 konvergierende Folge $|z_\nu|$ $(|z_\nu| < 1)$ konvergiert dies unendliche Produkt und stellte eine in

$|z| < 1$ holomorphe und dort natürlich unimodular beschränkte Funktion $\not\equiv 0$ dar[5], die in $-z_1, -z_2, -z_3, \ldots$ Nullstellen besitzt. Nun wählen wir die Folge z_ν aber zugleich so, daß alle Punkte von $|z| = 1$ ihre Häufungspunkte sind.

Weitergehende Untersuchungen über Holomorphie- und Meromorphiegebiete, die sich natürlich keineswegs auf Funktionenspalten aus $\mathfrak{S}_0^n$ zu beschränken brauchen, und die auch den Fall der Mehrdeutigkeit erfassen können, stehen noch aus.

Wir wenden uns den rationalen unter den EFSpn zu, also der Menge $\mathfrak{S}_r^n$. Die erste Frage ist nun die, ob die gemäß Satz 1 zu einer rationalen Funktionenspalte aus $\mathfrak{S}^n$ äquivalente EFSp rational ist. Die Antwort ist positiv. Sie ist enthalten in dem folgenden etwas allgemeiner formulierten

Satz 6: Zu jeder rationalen Funktionenspalte $f(z)$ gibt es eine rationale Funktion $r(z)$, so daß

$$|\mathfrak{f}(z)| = |r(z)| \qquad \text{auf } |z| = 1.$$

Beweis: Offenbar genügt es, sich auf Polynomspalten $\mathfrak{f}(z) \not\equiv \mathfrak{o}$ zu beschränken. Sei also o. B. d. A.

$$\mathfrak{f}(z) = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 z + \ldots + \mathfrak{a}_k z^k, \ \mathfrak{a}_k \neq \mathfrak{o}.$$

Wir setzen

$$\varrho(z) = \overset{\sim}{\mathfrak{f}}\left(\frac{1}{z}\right) \mathfrak{f}(z) = \sum_{\mu,\nu=0}^{k} \overset{\sim}{\mathfrak{a}}_\nu \mathfrak{a}_\mu z^{\mu-\nu} = \sum_{\varkappa=-k}^{k} a_\varkappa z^\varkappa.$$

Wegen

$$\overline{\varrho\left(\frac{1}{z}\right)} = \varrho(z) \tag{8}$$

ist

$$a_\varkappa = a_{-\varkappa}. \tag{9}$$

Es können nicht alle $a_\varkappa = 0$ sein, da insbesondere

$$a_0 = \sum_{\nu=0}^{k} |\mathfrak{a}_\nu|^2 \neq 0 \tag{10}$$

ist. Es gibt also einen Index l $(0 \leq l \leq k)$, so daß

$$a_l \neq 0, \ a_\varkappa = 0 \text{ für } \varkappa > l$$

ist. Wegen (9) ist demnach

---

[5] Dazu ist die Konvergenz von $\Sigma(1 - |z_\nu|)$ hinreichend, aber auch notwendig, wie aus der Theorie der beschränkten Funktion bekannt ist.

$$\varrho(z) = \sum_{\varkappa=-l}^{l} a_\varkappa z^\varkappa,\ a_l \neq 0.$$

Für $l = 0$ kann, da wegen (10) a_0 positiv-reell ist, $r(z) \equiv \sqrt{a_0}$ gesetzt werden, und wir können uns im folgenden auf $l > 0$ beschränken. Die Produktzerlegung von $\varrho(z)$ sei

$$\varrho(z) = z^{-l} a_l (z + \alpha_1)(z + \alpha_2) \ldots (z + \alpha_{2l}), \tag{11}$$

wegen (8) ist aber auch

$$\varrho(z) = z^{-l} \bar{a}_l (1 + \bar{\alpha}_1 z)(1 + \bar{\alpha}_2 z) \ldots (1 + \bar{\alpha}_{2l} z).$$

Die Eindeutigkeit der Produktzerlegung gestattet den Schluß, daß alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2l}$ von 0 verschieden sind, und daß das System der Zahlen $\frac{1}{\bar{\alpha}_1}, \frac{1}{\bar{\alpha}_2}, \ldots \frac{1}{\bar{\alpha}_{2l}}$ bis auf die Reihenfolge mit dem System der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2l}$ übereinstimmt. Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2l}$ lassen sich also zu Paaren einander konjugiert-reziproker zusammenfassen, so daß bei geeigneter Numerierung

$$\alpha_{l+\varkappa} = \frac{1}{\bar{\alpha}_\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots l)$$

ist. Dann lautet (11):

$$\varrho(z) = \frac{a_l}{\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_l} (z + \alpha_1) \ldots (z + \alpha_l)\left(\frac{1}{z} + \bar{\alpha}_1\right) \ldots \left(\frac{1}{z} + \bar{\alpha}_l\right).$$

Mit den Abkürzungen

$$\frac{a_l}{\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_l} = a,\ (z + \alpha_1) \ldots (z + \alpha_l) = p(z)$$

ist

$$\varrho(z) = a\, p(z)\, \overline{p(1/\bar{z})}. \tag{12}$$

Es gibt also ein Polynom $p(z)$, so daß

$$\widetilde{\overline{\mathfrak{f}(1/\bar{z})}}\, \mathfrak{f}(z) = a\, \overline{p(1/\bar{z})}\, p(z)$$

ist. Setzen wir speziell $|z| = 1$, so lautet dies

$$|\mathfrak{f}(z)|^2 = a\, |p(z)|^2,$$

und da auf $|z| = 1$ mehr noch $\mathfrak{f}(z) \not\equiv 0$ ist, folgt $a \neq o$, daß a reell > 0 ist. In

$$r(z) = \sqrt{a}\, p(z)$$

haben wir dann die gewünschte Funktion gefunden.

Satz 7: Zu je $n-1$ rationalen Funktionen $f_2(z), \ldots f_n(z)$, für die

$$|f_2(z)|^2 + \ldots + |f_n(z)|^2 \leq 1 \qquad \text{auf } |z| = 1 \tag{13}$$

gilt, gibt es eine rationale Funktion $f_1(z)$, so daß

$$|f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2 + \ldots + |f_n(z)|^2 = 1 \qquad \text{auf } |z| = 1$$

gilt.

Beweis: Wegen Satz 6, nach dem eine rationale Funktion $r(z)$ existiert, so daß

$$|f_2(z)|^2 + \ldots + |f_n(z)|^2 = |r(z)|^2 \text{ auf } |z| = 1$$

ist, kann man sich beim Beweis von Satz 7 o. B. d. A. auf den Fall $n = 2$ beschränken. Diese Beschränkung ist zwar für die Beweisführung nicht wesentlich, doch sehr bequem und soll deshalb gemacht werden.

Sei

$$f_2(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$$

mit Polynomen $u(z)$, $v(z)$. Wir setzen

$$\varrho(z) = \overline{v(1/\bar{z})}\, v(z) - \overline{u(1/\bar{z})}\, u(z).$$

$\varrho(z)$ ist dann und nur dann identisch Null, wenn

$$|v(z)| = |u(z)| \qquad \text{auf } |z| = 1$$

ist, und dann ist $f_1(z) \equiv 0$ eine (und zwar die einzige) Lösung der Aufgabe. Sei nun $\varrho(z) \not\equiv 0$. Dann kann wie im Beweis zu Satz 6 geschlossen werden, daß eine Konstante a und ein Polynom $p(z)$ existiert, so daß (12) gilt. Es ist also

$$1 - \overline{f_2(1/\bar{z})}\, f_2(z) = a\, \frac{\overline{p(1/\bar{z})}\, p(z)}{\overline{v(1/\bar{z})}\, v(z)},$$

auf $|z| = 1$ demnach

$$1 - |f_2(z)|^2 = a \left| \frac{p(z)}{v(z)} \right|^2.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung nach Voraussetzung ≥ 0 ist, haben wir in

$$f_1(z) = \sqrt{a}\, \frac{p(z)}{v(z)}$$

eine geeignete Funktion gefunden.

Unmittelbare Folgerungen von Satz 7 sind

Satz 8: Je $n-1$ rationale Funktionen $f_2(z), \ldots f_n(z)$, die in $|z| \leq 1$ holomorph sind, und für die (13) gilt, lassen sich durch eine Funktion $f_1(z)$ zu einer EFSp aus $\mathfrak{E}_\tau^n$ ergänzen.

Satz 9: Wenn $n-1$ Komponenten einer EFSp $\mathfrak{f}(z)$ aus $\mathfrak{E}^n$ rational sind, so ist $\mathfrak{f}(z) \in \mathfrak{E}_\tau^n$.

Es erhebt sich hier die Frage, ob diese beiden Sätze Analoga im Bereich $\mathfrak{E}_{\mathfrak{y}}^n$ haben, d. h. ob in Satz 4 die Forderung (4) zu

$$|f_2(z)|^2 + \ldots + |f_n(z)|^2 \leq 1 \qquad \text{in } |z| \leq 1$$

abgeschwächt werden kann. Die Beantwortung dieser Frage steht noch aus.

Jede rationale EFSp $\mathfrak{f}(z)$ läßt sich in der Form

$$\mathfrak{f}(z) = \frac{\mathfrak{p}(z)}{p(z)} \tag{14}$$

schreiben, wo $p(z)$ ein Polynom und $\mathfrak{p}(z)$ eine Polynomspalte ist. Dabei sollen p und $\mathfrak{p}$ teilerfremd gewählt sein, d. h. es soll keine Zahl a existieren, für die zugleich $p(a) = 0$, $\mathfrak{p}(a) = \mathfrak{o}$ sind. Da $\mathfrak{f}(z)$ speziell im Nullpunkt holomorph ist, muß dann $p(o) \neq 0$ sein, und durch Anbringen eines gemeinsamen Faktors in Zähler und Nenner von (14) können wir $p(0)$ etwa zu 1 normieren. Dadurch sind $p(z)$, $\mathfrak{p}(z)$ eindeutig festgelegt. Den Grad der Polynomspalte $\mathfrak{p}(z)$ (d. i. der Maximalgrad der Komponenten) wollen wir die *Ordnung* der rationalen EFSp $\mathfrak{f}(z)$ nennen.

Die Funktion $\widetilde{\mathfrak{f}(1/\bar{z})}\,\mathfrak{f}(z)$ ist rational, und da sie auf $|z| = 1$ den Wert 1 hat, ist sie überall gleich 1:

$$\widetilde{\mathfrak{f}(1/\bar{z})}\,\mathfrak{f}(z) \equiv 1 \qquad \text{für alle } z. \tag{15}$$

Hieraus folgt unmittelbar: Wenn z_0 eine Nullstelle von $\mathfrak{f}(z)$ ist, so ist $1/\bar{z}_0$ eine Polstelle[6]. Insbesondere kann also ∞ keine Nullstelle von $\mathfrak{f}(z)$ sein, d. h. der Grad des Nennerpolynoms in (14) ist nicht größer als der Grad des Zählers, die Ordnung von $\mathfrak{f}(z)$. Die Ordnung ist also nur dann (und natürlich auch stets dann) 0, wenn eine konstante Spalte vorliegt.

Auf jede nicht konstante EFSp $\mathfrak{f}(z)$ läßt sich der Prozeß

$$\Gamma(\mathfrak{f}(0))\,\frac{\mathfrak{f}(z) - \mathfrak{f}(0)}{1 - \widetilde{\mathfrak{f}(0)}\,\mathfrak{f}(z)} \cdot \frac{1}{z} = \mathfrak{S}\{\mathfrak{f}(z)\},$$

dessen Iteration man als *Schurschen Algorithmus* bezeichnet, anwenden. Er führt wieder zu einer EFSp $\mathfrak{S}\{\mathfrak{f}(z)\}$, und diese entstehende ist rational,

[6] Für $n > 1$ gilt aber keineswegs das Umgekehrte.

wenn $\mathfrak{f}(z)$ es war. Wesentlich ist jetzt, daß dieser Prozeß die Ordnung der rationalen EFSp um genau 1 verringert:

Satz 10: Die Ordnung von $\mathfrak{S}\{\mathfrak{f}(z)\}$ *ist um* 1 *kleiner als die Ordnung von* $\mathfrak{f}(z)$, *wenn* $\mathfrak{f}(z)$ *eine rationale EFSp einer Ordnung* > 0 *ist.*

Bemerkung: Es sei erwähnt, daß allgemeiner beim Übergang von $\mathfrak{f}(z)$ zu $\Gamma(\mathfrak{f}(z_0))\,\dfrac{\mathfrak{f}(z)-\mathfrak{f}(z_0)}{1-\overline{\mathfrak{f}(z_0)}\,\mathfrak{f}(z)}\cdot\dfrac{1-\bar{z}_0 z}{z-z_0}$ $(|z_0|<1)$ sich die Ordnung der rationalen EFSp $\mathfrak{f}(z)$ um 1 erniedrigt.

Beweis: Wir setzen der Übersichtlichkeit halber

$$\mathfrak{f}(0)=\mathfrak{p}(0)=\mathfrak{a}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{S}\{\mathfrak{f}(z)\}=\Gamma(\mathfrak{a})\,\frac{\mathfrak{p}(z)-\mathfrak{a}p(z)}{p(z)-\tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{p}(z)}\cdot\frac{1}{z}. \tag{16}$$

Das Polynom $p(z)-\tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{p}(z)$ und die Polynomspalte $\Gamma(\mathfrak{a})\,(\mathfrak{p}(z)-\mathfrak{a}p(z))\cdot\dfrac{1}{z}$ sind teilerfremd. Die gegenteilige Annahme würde nämlich die Existenz einer Zahl a bedeuten, für die

$$p(a)-\tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{p}(a)=o, \tag{17}$$

$$\mathfrak{p}(a)-\mathfrak{a}p(a)=\mathfrak{o} \tag{18}$$

zugleich gilt (man beachte die Umkehrbarkeit von $\Gamma(\mathfrak{a})$). Linksseitige Multiplikationen von (18) mit $\tilde{\mathfrak{a}}$ und Verwendung von (17) liefert

$$(1-\tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{a})\,p(a)=0,$$

wegen $|\mathfrak{a}|<1$ also $p(a)=0$, woraus dann wegen (18) auch $\mathfrak{p}(a)=\mathfrak{o}$ folgt. Das ist ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von $p(z)$, $\mathfrak{p}(z)$.

Die Normierung des Nennerpolynoms $p(z)-\tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{p}(z)$ in (16) würde noch die Multiplikation von Zähler und Nenner mit $\dfrac{1}{1-|\mathfrak{a}|^2}$ erfordern. Sie ist aber für die Gradbetrachtungen unwesentlich, und so bleibt nur

$$\operatorname{grad}\left(\Gamma(\mathfrak{a})\,(\mathfrak{p}(z)-\mathfrak{a}p(z))\right)=\operatorname{grad}\mathfrak{p}(z) \tag{19}$$

zu beweisen. Sei

$$\mathfrak{p}(z)=\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1 z+\ldots+\mathfrak{a}_k z^k \quad (\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}_k\neq\mathfrak{o}),$$

$$p(z)=a_0+a_1 z+\ldots+a_k z^k \quad (a_0=1).$$

(19) besagt dann:

$$\Gamma(\mathfrak{a})\,(\mathfrak{a}_k-\mathfrak{a}a_k)\neq\mathfrak{o},$$

d. h.

$$\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}\mathfrak{a}_k \neq \mathfrak{o}. \tag{20}$$

Aus (15), nämlich

$$(\tilde{\bar{\mathfrak{a}}}_0 + \tilde{\bar{\mathfrak{a}}}_1 \frac{1}{z} + \ldots + \tilde{\bar{\mathfrak{a}}}_k \frac{1}{z^k})(\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 z + \ldots + \mathfrak{a}_k z^k) \equiv$$

$$\equiv (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \frac{1}{z} + \ldots + \bar{a}_k \frac{1}{z^k})(a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k)$$

ergibt sich durch Vergleich der Koeffizienten von z^k:

$$\tilde{\bar{\mathfrak{a}}}_0 \mathfrak{a}_k = \bar{a}_0 a_k,$$

d. h.

$$a_k = \tilde{\bar{\mathfrak{a}}} \mathfrak{a}_k.$$

Die zu beweisende Ungleichung (20) ist also äquivalent mit

$$\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}\,\tilde{\bar{\mathfrak{a}}}\,\mathfrak{a}_k \neq \mathfrak{o},$$

d. h. mit

$$(E - \mathfrak{a}\tilde{\bar{\mathfrak{a}}})\,\mathfrak{a}_k \neq \mathfrak{o},$$

wegen der Umkehrbarkeit der Matrix $E - \mathfrak{a}\tilde{\bar{\mathfrak{a}}}$ (es ist $(E - \mathfrak{a}\tilde{\bar{\mathfrak{a}}})^{-1} = \frac{1}{1 - |\mathfrak{a}|^2} \Gamma(\mathfrak{a})^2$) also mit $\mathfrak{a}_k \neq \mathfrak{o}$, was vorausgesetzt war. Damit ist alles bewiesen.

Durch den *Schur*schen Algorithmus wird also jede rationale EFSp in eine solche nullter Ordnung, d. h. in eine konstante Spalte vom Absolutbetrag 1 überführt. Die Umkehrung der Iterationsschritte ergibt den

Satz 11: Die Menge der rationalen EFSpn ist gleich der Menge der sich durch die Rekursionsformel

$$\mathfrak{f}_0(z) \equiv \mathfrak{e}\ (|\,\mathfrak{e}\,| = 1),\ \mathfrak{f}_{\nu+1}(z) = \Gamma(\mathfrak{c}_\nu)\,\frac{z\mathfrak{f}_\nu(z) + \mathfrak{c}_\nu}{1 + \tilde{\bar{\mathfrak{c}}}_\nu z\,\mathfrak{f}_\nu(z)}\ (|\,\mathfrak{c}_\nu\,| < 1,\ \nu \geq 0)$$

ergebenden EFSpn, d. h. gleich der Menge der Schrankenfunktionenspalten beim Koeffizientenproblem der beschränkten Funktionenspalten (Peschl-Erwe [4]). — *Dabei ist jede solche EFSp* $\mathfrak{f}_\nu(z)$ *von der Ordnung* ν.

Die Frage nach einer expliziten Formel für die rationalen EFSpn konnte trotz vieler Versuche nicht gelöst werden. Ein Ansatz findet sich in der Arbeit [4] von *E. Peschl* und Verfasser, in der die Funktionenspalten höchstens erster Ordnung als die folgenden identifiziert wurden:

$$\mathfrak{f}(z) = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\,\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

$$|a| < 1, \; |\mathfrak{a}|^2 + |\mathfrak{b}|^2 = 1, \; \tilde{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b} = 0.$$

Die Zahl a und die Spalten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sind dabei eindeutig durch $\mathfrak{f}$ bestimmt. Es handelt sich also um eine reell $(4n-1)$-parametrige Mannigfaltigkeit, wie man auch aus vorangehenden Sätzen ersehen könnte.

Zwei in $|z| < 1$ holomorphe, in $|z| \leq 1$ stetige Funktionenspalten $\mathfrak{f}(z)$, $\mathfrak{g}(z)$ heißen *orthogonal*, wenn

$$\widetilde{\mathfrak{f}(z)}\,\mathfrak{g}(z) = 0 \qquad \text{auf } |z| = 1$$

ist. Ein System von Funktionenspalten $\mathfrak{f}_1(z), \ldots \mathfrak{f}_k(z)$ heißt ein *Orthonormalsystem*, wenn jede EFSp aus $\mathfrak{E}_{\mathfrak{f}\mathfrak{l}}^n$ ist und je zwei orthogonal sind, wenn also für die Matrix $A(z) = (\mathfrak{f}_1(z), \ldots \mathfrak{f}_k(z))$ gilt:

$$\widetilde{A(z)}\,A(z) = E \text{ auf } |z| = 1. \tag{21}$$

Notwendig muß $k \leq n$ sein. Der Fall $k = n$ läßt sich erschöpfend behandeln.

Satz 12: Ein Orthonormalsystem von n n-gliedrigen Funktionenspalten ist ein System rationaler Funktionenspalten. Aus (21) *folgt also für eine quadratische Matrix $A(z)$, daß sie rational ist. Es gilt dann für diese nun in der abgeschlossenen Ebene definierte Matrix*

$$\widetilde{A(1/\bar{z})}\,A(z) \equiv E \qquad \text{für alle } z.$$

Beweis: Die Funktion $\det A(z)$ ist in $|z| < 1$ holomorph, in $|z| \leq 1$ stetig. (21) zeigt ,daß es sich um eine Einheitsfunktion handelt, daß also insbesondere $\det A(z) \not\equiv 0$ ist. Die zu $A(z)$ inverse Matrix $A^{-1}(z)$ ist hiernach in $|z| < 1$ meromorph und in $|z| \leq 1$, abgesehen von den eventuellen Polstellen in $|z| < 1$, stetig. Auf $|z| = 1$ ist gemäß (21)

$$A^{-1}(z) = \widetilde{A(z)}. \tag{22}$$

Die Matrix $\widetilde{A^{-1}(1/\bar{z})}$ ist also in $|z| > 1$ (einschließlich ∞) meromorph und hat gemäß (22) stetigen Anschluß an die in $|z| \leq 1$ definierte Matrix $A(z)$. Hieraus folgt, etwa mittels des Satzes von *Morera*, daß die Matrix

$$B(z) = \begin{cases} A(z) & \text{in } |z| \leq 1 \\ \widetilde{A^{-1}(1/\bar{z})} & \text{in } |z| > 1 \text{ (einschl. } \infty) \end{cases}$$

in der ganzen abgeschlossenen Ebene meromorph, d. h. rational ist. Die

rationale Matrix $\widetilde{B(1/\bar{z})}\, B(z)$, die auf $|z| = 1$ den Wert E hat, ist dann gleich E für alle z.

Nun die Fälle $k < n$. Wir beschränken uns auf die Behandlung von Orthonormalsystemen rationaler Funktionenspalten. Allgemeiner konnten noch keine entscheidenden Aussagen gewonnen werden.

Die Menge $\mathfrak{R}^n$ der rationalen n-gliedrigen Funktionenspalten stellt in trivialer Weise einen n-dimensionalen Vektorraum über dem Körper $\mathfrak{R}^1$ der rationalen Funktionen dar. Die Sätze der linearen Algebra können also angewendet werden. Über den oben gegebenen Begriff der Orthogonalität hinaus können wir aber ein skalares Produkt je zweier Elemente $\mathfrak{f}(z), \mathfrak{g}(z) \in \mathfrak{R}^n$ durch $\widetilde{\mathfrak{f}(1/\bar{z})}\, \mathfrak{g}(z)$ definieren. Das skalare Produkt zweier gleicher Spalten $\mathfrak{f}(z) \in \mathfrak{R}^n$ heißt die *Norm* dieser Spalte $\mathfrak{f}(z)$. Die Spalten mit der Norm 1 sind genau die rationalen EFSpn. Satz 6 macht die interessante Aussage, daß sich jede Spalte $\mathfrak{f}(z) \in \mathfrak{R}^n$, $\mathfrak{f}(z) \not\equiv \mathfrak{o}$, normieren läßt, d. h. daß eine rationale Funktion $r(z)$ existiert, so daß $\dfrac{\mathfrak{f}(z)}{r(z)}$ die Norm 1 hat. Die Sätze der linearen Algebra (Auflösung von Gleichungssystemen, hier über dem Körper $\mathfrak{R}^1$) garantieren, daß zu beliebigen Spalten $\mathfrak{f}_1(z), \ldots \mathfrak{f}_k(z) \in \mathfrak{R}^n$ $(k < n)$ stets eine Spalte $\mathfrak{f}(z) \not\equiv \mathfrak{o}$ gefunden werden kann, so daß die $\mathfrak{f}_\varkappa(z)$ mit $\mathfrak{f}(z)$ das skalare Produkt 0 haben, also zu $\mathfrak{f}(z)$ orthogonal sind, und $\mathfrak{f}(z)$ kann dabei noch normiert angenommen werden:

$$\widetilde{\mathfrak{f}_\varkappa(1/z)}\, \mathfrak{f}(z) = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots k), \qquad \widetilde{\mathfrak{f}(1/\bar{z})}\, \mathfrak{f}(z) = 1.$$

Für $k = n - 1$ läßt sich die dann im wesentlichen eindeutig bestimmte Lösung $\mathfrak{f}(z)$ als ein äußeres Produkt schreiben. Wir haben damit auch den *Erhard Schmidt*schen Orthonormalisierungsprozeß zur Verfügung, insbesondere also den

Satz 13: Jedes Orthonormalsystem von Funktionenspalten $\mathfrak{f}_1(z), \ldots \mathfrak{f}_k(z) \in \mathfrak{R}^n$ $(k < n)$ *läßt sich durch Hinzunahme von* $n - k$ *Funktionenspalten* $\mathfrak{f}_{k+1}(z), \ldots \mathfrak{f}_n(z)$ *zu einem Orthonormalsystem* $\mathfrak{f}_1(z), \ldots \mathfrak{f}_n(z)$ *ergänzen.*

Auf Grund von Satz 12 stellt dieser Satz eine gewisse Charakterisierung der Menge aller quadratischen Matrizen $A(z)$ dar, die (21) erfüllen.

Abschließend sollen die Resultate und die ungelöst gebliebenen Fragen dieser Arbeit nochmal zusammengestellt werden. Es wurden die Klassen $\mathfrak{E}^n$, $\mathfrak{E}^n_{\mathfrak{ft}}$, $\mathfrak{E}^n_{\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{E}^n_{\mathfrak{r}}$ von EFSpn untersucht, insbesondere bezüglich der folgenden Fragen:

1. Die Frage der Äquivalenz. Welche Voraussetzung muß an eine Funktionenspalte $\mathfrak{f}(z) \in \mathfrak{H}^n$ gestellt werden, damit die zu $\mathfrak{f}(z)$ äquivalente EFSp, die stets existiert und im wesentlichen eindeutig bestimmt ist (Satz 1), zu der jeweils untersuchten Klasse gehört? Für $\mathfrak{E}^n$, $\mathfrak{E}^n_\mathfrak{h}$, $\mathfrak{E}^n_\mathfrak{r}$ konnte sie voll beantwortet werden (Sätze 1, 3, 6), für $\mathfrak{E}^n_\mathfrak{ft}$ dagegen nicht.

2. Die Frage, wann sich $n-1$ Funktionen $f_2(z), \ldots f_n(z)$ durch Hinzunahme einer weiteren zu einer EFSp der untersuchten Klasse ergänzen läßt. Eine Teilantwort durch Angabe der hinreichenden Bedingung

$$|f_2(z)|^2 + \ldots + |f_n(z)|^2 < 1 \tag{23}$$

konnte für $\mathfrak{E}^n$ gegeben werden. Die entsprechende Antwort für $\mathfrak{E}^n_\mathfrak{h}$ (Satz 4) wurde durch den Satz 5 ergänzt und damit unter Zuhilfenahme der unitären Drehungen als Normierungsmittel eine Charakterisierung gewonnen. Offen bleibt aber noch die Frage, ob die Bedingung (23) zu

$$|f_2(z)|^2 + \ldots + |f_n(z)|^2 \leq 1$$

abgeschwächt werden darf. Für die Klasse $\mathfrak{E}^n_\mathfrak{r}$ ist das der Fall, und damit ist allein für diese Klasse eine voll befriedigende Antwort gefunden (Satz 8). Wie bei Frage 1 bietet auch bei Frage 2 die Behandlung von $\mathfrak{E}^n_\mathfrak{ft}$ bis jetzt noch nicht überwundene Schwierigkeiten.

3. Die Frage der Verschiedenheit jener Klassen. Während für $n = 1$ die genannten Klassen zusammenfallen, sind sie für $n > 1$ alle voneinander verschieden.

Das Problem der Holomorphie- und Meromorphiegebiete von EFSpn fand eine nur oberflächliche Behandlung in den mit Satz 4a verknüpften Bemerkungen. Hier bietet sich noch ein ergiebiges Tätigkeitsfeld dar.

Der letzte Teil der Arbeit bezieht sich auf Orthonormalsysteme von Funktionenspalten. Die Normierung bedeutet dabei gerade, daß EFSpn vorliegen. Zwar ist nur für den Spezialfall der rationalen Funktionenspalten ein inneres Produkt erklärt, wenigstens der Begriff der Orthogonalität läßt sich aber für in $|z| \leq 1$ stetige Funktionenspalten geben. Es handelt sich mit anderen Worten um die Frage nach in $|z| < 1$ holomorphen, in $|z| \leq 1$ stetigen Funktionenmatrizen $A(z)$ von n Zeilen und k Spalten, für die $\widetilde{A(z)}\, A(z)$ auf $|z| = 1$ die Einheitsmatrix ist. Mit Mitteln der linearen Algebra über dem Körper der rationalen Funktionen läßt sich der Fall der rationalen unter diesen Funktionenmatrizen weitgehend bearbeiten. Im allgemeinen Fall konnten für $k < n$ keine wesentlichen Aussagen gemacht werden, während für $k = n$ ein Spiegelungsprinzip die Rückführung auf den Fall rationaler

Funktionenmatrizen gestattet (Satz 12). Diese Matrizen können den Anlaß zur Untersuchung von Operationen in der Menge der EFSpn geben, die über die Transformation mittels analytischer Automorphismen der Einheitshyperkugel hinausgehen, indem nämlich die unitäre Drehung zu einer solchen Matrix $A(z)$ verallgemeinert wird. Die Multiplikation einzelner Komponenten von EFSpn mit Einheitsfunktionen sind z. B. solche Operationen.

Ich möchte nicht versäumen, Herrn *E. Peschl* meinen ganz besonderen Dank für sein fortwährendes Interesse an den vorliegenden Untersuchungen auszusprechen. Im Anschluß an die Arbeiten [4], [5], die ich gemeinsam mit ihm veröffentlichte, gab er den Anstoß zur Untersuchung der EFSpn, und aus vielen späteren Gesprächen zu diesem Thema nahm ich Hinweise und Anregungen für meine Arbeit mit, die einzeln aufzuzählen, mir heute garnicht mehr möglich wäre.

Literatur

[1] *Behnke-Sommer.* Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955

[2] *Bieberbach.* Lehrbuch der Funktionentheorie II. Leipzig-Berlin 1931.

[3] *Carathéodory.* Funktionentheorie II. Basel 1950.

[4] *Peschl-Erwe.* Über beschränkte Systeme von Funktionen. Math. Annalen **126** (1953).

[5] *Peschl-Erwe.* Über die Norm regulärer Funktionenspalten. Archiv d. Math. **4** (1953).

[6] *Sommer.* Die Geometrie der Hyperkugelautomorphismen. Münster/Westf. 1949.

Über eine Klasse von $\mathfrak{M}$-Untergruppen

Von

Wilfried Nöbauer, Wien

(Eingegangen am 30. November 1956)

I. Ziel der folgenden Untersuchungen ist es, die Methoden und Ergebnisse zweier früherer Arbeiten von mir ([2], [3]) über eindimensionale Restklassengruppen auf den Fall von k Dimensionen zu verallgemeinern. In der einen dieser beiden Arbeiten ([2]) habe ich die Untergruppe $\mathfrak{G}(n, t)$ von $\mathfrak{G}_n$ betrachtet, welche aus allen $F \in \mathfrak{G}_n$ mit einem Vertreterpolynom der Gestalt

$$f(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{r} t^{\nu-1} a_\nu x^\nu$$

besteht und einige Sätze darüber abgeleitet. Das Hauptresultat der anderen Arbeit ([3]) ist der Beweis der Isomorphiebeziehung

$$\mathfrak{G}(p^e, 1) \sim \Sigma_p \mathfrak{G}(p^{e-1}, p)$$

In dieser Arbeit wird also nun die k-dimensionale Verallgemeinerung $\mathfrak{G}^k(n, t)$ von $\mathfrak{G}(n, t)$ untersucht, zunächst gezeigt, daß dafür Sätze analog zu den in [2] für $\mathfrak{G}(n, t)$ bewiesenen gelten und dann auch die Beziehung

$$\mathfrak{G}^k(p^e, 1) \sim \Sigma_{p^k} \mathfrak{G}^k(p^{e-1}, p)$$

bewiesen. Man wird sehen, daß sich die in [2] und [3] verwendeten Methoden relativ einfach auf diesen Fall übertragen lassen und wir werden uns deshalb bei manchen Beweisen ziemlich kurz fassen, auch öfter auf andere Arbeiten von mir zurückweisen. Im Laufe der Untersuchungen wird sich vor allem wieder zeigen, daß die Struktur dieser Gruppen $\mathfrak{G}^k(n, t)$ zurückgeführt werden kann auf die Struktur der Gruppen $\mathfrak{G}^k(p^e, p^r)$ mit $1 \leqq r \leqq e$, welche, soviel ich weiß, in der Literatur sonst noch nicht in Erscheinung getreten sind.

II. In den folgenden Überlegungen sei $k \geqq 1$ und Γ_k so wie in [1] die direkte Summe von k Exemplaren des ganzzahligen Polynomringes $\Gamma[\mathfrak{x}]$, wobei $\mathfrak{x} = (x_1, x_2 \ldots x_k)$ gesetzt ist. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ ... stets ganzzahlige Vektoren der Gestalt:

$$\mathfrak{r} = (r_1, r_2 \ldots r_k) \quad \text{alle } r_i \geqq 0 \tag{1}$$

Im Bereich aller dieser Vektoren führen wir eine Ordnungsrelation ein durch:

$$\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{s} \leftrightarrow r_i \leqq s_i \text{ für } i = 1, 2 \ldots k.$$

Dadurch wird die Menge der Vektoren $\mathfrak{r}$ zu einer Halbordnung. Es soll $\mathfrak{r} < \mathfrak{s}$ heißen $\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{s}$, aber $\mathfrak{r} \neq \mathfrak{s}$.

Weiter setzen wir:

$$\sigma(\mathfrak{r}) = \sum_{\nu=1}^{k} r_\nu \tag{2}$$

$$\mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} = \prod_{\nu=1}^{k} x_\nu^{r_\nu} \tag{3}$$

Wir können dann ersichtlich — wenn wir uns der gebräuchlichen Symbolik der Vektorrechnung bedienen — ein jedes Element $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \in \Gamma_k$ folgendermaßen schreiben:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \sum_{0 < \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{t}} \mathfrak{a}_\mathfrak{r} \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} \tag{4}$$

dabei sind die $\mathfrak{a}_\mathfrak{r}$ Spaltenvektoren mit ganzzahligen Komponenten und $\mathfrak{t}$ ist ein Vektor (1), der „groß genug" gewählt wurde.

III. Es sei nun $t \geqq 1$ eine feste natürliche Zahl. Wir definieren: $\mathfrak{M}(t)$ sei die Menge aller Polynomvektoren aus Γ_k von der Gestalt

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}_0 + \sum_{0 < \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{t}} t^{\sigma(\mathfrak{r})-1} \mathfrak{a}_\mathfrak{r} \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} \tag{5}$$

Wir beweisen

Satz 1: Alle Elemente von $\mathfrak{G}_n^k$, welche einen Vertreter in $\mathfrak{M}(t)$ besitzen, bilden eine Untergruppe $\mathfrak{G}^k(n, t)$ von $\mathfrak{G}_n^k$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß gilt:

Aus $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(t)$ und $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{M}(t)$ folgt $\mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x})) \in \mathfrak{M}(t)$. Dies ist genau so einzusehen wie im eindimensionalen Fall (vergleiche [2], II):

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}_0 + \sum_{0 < \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{t}} t^{\sigma(\mathfrak{r})-1} \mathfrak{a}_\mathfrak{r} \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}}$$

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{b}_0 + \sum_{0 < \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{u}} t^{\sigma(\mathfrak{r})-1} \mathfrak{b}_\mathfrak{r} \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}}$$

Wir setzen:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) = t\,\mathfrak{a}_0 + \sum_{0 < \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{t}} \mathfrak{a}_\mathfrak{r} \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} \qquad \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \frac{1}{t} \mathfrak{F}(t\,\mathfrak{x})$$

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{x}) = t\,\mathfrak{b}_0 + \sum_{0 < \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{u}} \mathfrak{b}_\mathfrak{r} \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} \qquad \mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = \frac{1}{t} \mathfrak{G}(t\,\mathfrak{x})$$

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{x})) = \frac{1}{t} \mathfrak{F}(t \frac{1}{t} \mathfrak{G}(t\,\mathfrak{x})) = \frac{1}{t} \mathfrak{H}(t\,\mathfrak{x}) \tag{6}$$

wo

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{G}(\mathfrak{x})) = \mathfrak{d}_0 + \sum_{0 < \tau \leqq \mathfrak{v}} \mathfrak{c}_\tau \mathfrak{x}^\tau$$

Weiter ist

$$\mathfrak{d}_0 = \mathfrak{H}(0) = \mathfrak{F}(\mathfrak{G}(0)) = \mathfrak{F}(t\,\mathfrak{b}_0) = t\,\mathfrak{a}_0 + \sum_{0 < \tau \leqq t} t^{\sigma(\tau)}\,\mathfrak{a}_\tau\,\mathfrak{b}_0^\tau$$

also

$$\mathfrak{d}_0 = t\,\mathfrak{c}_0$$

so daß aus (6) die Behauptung folgt.

IV. Genau wie im eindimensionalen Fall gilt auch hier

Satz 2: $\mathfrak{G}^k(n, t)$ *ist multiplikativ, das heißt*: *Ist* $n = ab$ *mit* $(a, b) = 1$, *so gilt*[1] $\mathfrak{G}^k(n, t) \sim \mathfrak{G}^k(a, t) \times \mathfrak{G}^k(b, t)$. *Ist* $F \in \mathfrak{G}^k(n, t)$ *und* $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ *Vertreter von* F, *so werden auch die Komponenten* F_a, F_b *von* F *in* $\mathfrak{G}^k(a, t)$ *bzw.* $\mathfrak{G}^k(b, t)$ *durch* $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ *vertreten.*

Beweis: Dieser kann durch genau die selben Schlüsse erfolgen, wie sie beim Beweis von [2], Satz 2 angewendet wurden, bloß hat man hier von der direkten Produktzerlegung $\mathfrak{G}_n^k \sim \mathfrak{G}_a^k \times \mathfrak{G}_b^k$ auszugehen. Die erste Aussage des Satzes folgt übrigens unmittelbar aus [4], Satz 4.

V. Wir wollen nun zunächst jene Sätze von [2] auf unseren Fall übertragen, welche Aussagen über das Verhalten von $\mathfrak{G}^k(n, t)$ in Abhängigkeit von t enthalten.

Wir haben hier:

Satz 3: *Aus* $s \mid t$ *folgt* $\mathfrak{G}^k(n, t) \subseteq \mathfrak{G}^k(n, s)$.

Der Beweis erfolgt genau so wie der von [2], Satz 4, wenn man statt gewöhnlicher Polynome Polynomvektoren von der durch (5) gegebenen Gestalt betrachtet.

Satz 4: *Ist* $(p^e, t) = p^r$, *so gilt* $\mathfrak{G}^k(p^e, t) = \mathfrak{G}^k(p^e, p^r)$.

Auch dieser Beweis wird genau so geführt wie der des entsprechenden Satzes 5 von [2].

Satz 5: *Es gilt* $\mathfrak{G}^k(n, s) = \mathfrak{G}^k(n, t)$, *wenn* $(n, s) = (n, t)$ *ist. Es ist also insbesondere* $\mathfrak{G}^k(n, s) = \mathfrak{G}^k(n, t)$, *wenn* $s \equiv t \bmod n$ *ist.*

Der Beweis erfolgt wieder genau so wie der des entsprechenden Satzes 6 in [2], und wir wollen hier eine bei diesem Beweis gebliebene kleine Lücke ausfüllen:

Man erhält also zunächst so wie dort, daß $\mathfrak{G}^k(n, s)$ und $\mathfrak{G}^k(n, t)$ zueinander isomorph sind. Wir bezeichnen Isomorphismen durch $\sim$,

[1] Das Zeichen $\sim$ bedeutet einen Isomorphismus. In den Arbeiten [2], [4] habe ich für Isomorphismen meist $=$ geschrieben, es erweist sich aber hier als zweckmäßiger, zwischen Isomorphismus und Gleichheit von Gruppen zu unterscheiden.

setzen $(n, s) = (n, t) = d$, dann gilt wegen

$$(n, s) = (n, t) = (n, d)$$

und

$$d \mid s, \; d \mid t$$

nach dem schon bewiesenen und Satz 3:

$$\mathfrak{G}^k(n, s) \sim \mathfrak{G}^k(n, d) \qquad \mathfrak{G}^k(n, s) \subseteq \mathfrak{G}^k(n, d)$$

$$\mathfrak{G}^k(n, t) \sim \mathfrak{G}^k(n, d) \qquad \mathfrak{G}^k(n, t) \subseteq \mathfrak{G}^k(n, d)$$

da es sich hier um endliche Gruppen handelt, haben wir also

$$\mathfrak{G}^k(n, s) = \mathfrak{G}^k(n, d) = \mathfrak{G}^k(n, t).$$

Es gilt also so wie im eindimensionalen Fall, daß jede der Gruppen $\mathfrak{G}^k(n, t)$ gleich ist einer der Gruppen $\mathfrak{G}^k(n, d)$ mit $d \mid n$ und ebenso wie dort haben wir (in der Bezeichnungsweise von [1]):

$$\mathfrak{G}^k(n, 1) = \mathfrak{G}^k_n \qquad \mathfrak{G}^k(n, n) = {}_0\mathfrak{M}^k_n.$$

VI. Nun wollen wir zeigen, daß sich auch [2], Satz 3 leicht auf unseren Fall übertragen läßt, es gilt nämlich:

Satz 6: $\mathfrak{G}^k(n, t)$ *ist teilertreu, das heißt, aus* $m \mid n$ *folgt, daß* $\mathfrak{G}^k(m, t)$ *homomorphes Bild von* $\mathfrak{G}^k(n, t)$ *ist. Ist* $F \in \mathfrak{G}^k(n, t)$ *und* $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ *Vertreter von* F*, so wird auch das Bild* $\overline{F}$ *von* F *in* $\mathfrak{G}^k(m, t)$ *durch* $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ *vertreten.*

Wir führen den Beweis nach dem selben Schema wie den von [2], Satz 3: Ist $F \in \mathfrak{G}^k(n, t)$ und $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ Vertreter der Gestalt (5) von F, so vertritt $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ auch ein Element $\overline{F} \in \mathfrak{G}^k(m, t)$; dieses $\overline{F}$ ordnen wir dem F als Bild zu, und man erkennt so wie in [2], daß diese Abbildung eine Homomorphie von $\mathfrak{G}^k(n, t)$ in $\mathfrak{G}^k(m, t)$ ist.

Daß bei dieser Homomorphie tatsächlich jedes Element $\overline{F}$ von $\mathfrak{G}^k(m, t)$ als Bild auftritt, überlegen wir uns zunächst wieder für den Fall, daß $n = p^e$, also $m = p^d$ mit $d \leqq e$ ist, indem wir drei Fälle unterscheiden:

a) $d > 1$: Sei $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ Vertreter der Gestalt (5) für $\overline{F}$, dann erzeugt $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ ein volles Vektorsystem mod p^d, also auch mod p^e, vertritt also ein $F \in \mathfrak{G}^k(p^e, t)$, welches $\overline{F}$ zum Bild hat.

b) $d = 1$, $t \equiv 0 \bmod p$: In diesem Fall besitzt $\overline{F}$ einen Vertreter $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a} + A\,\mathfrak{x}$ (A quadrat. Matrix). Dieser erzeugt ein volles Vektorsystem mod p, daher gilt $|A| \not\equiv 0 \bmod p$, daher erzeugt $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ auch ein volles Vektorsystem mod p^e, vertritt also $F \in \mathfrak{G}^k(p^e, t)$, welches $\overline{F}$ zum Bild hat.

c) $d = 1, t \not\equiv 0 \bmod p$: In diesem Fall gilt nach Satz 5 $\mathfrak{G}^k(p, t) = \mathfrak{G}^k(p, 1) = \mathfrak{G}_p^k$ sowie $\mathfrak{G}^k(p^e, t) = \mathfrak{G}^k(p^e, 1) = \mathfrak{G}_{p^e}^k$. Wie sich nun aus den in [1], § 11 durchgeführten Überlegungen sogleich ergibt, erhält man eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}_{p^e}^k$ auf $\mathfrak{G}_p^k$, wenn man jedem $F \in \mathfrak{G}_{p^e}^k$ das durch irgendeinen Vertreter $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \in F$ repräsentierte Element von $\mathfrak{G}_p^k$ zordnet. Diese homomorphe Abbildung bildet natürlich auch $\mathfrak{G}^k(p^e, t)$ auf $\mathfrak{G}^k(p, t)$ ab.

Es ist nun noch der Beweis des Satzes 6 bei beliebigem n zu erbringen. Dieser verläuft genau so wie der entsprechende Beweis in [2] und wir brauchen ihn daher hier nicht auszuführen.

VII. Wir wollen nun die Untersuchungen von [3] auf den Fall von mehreren Dimensionen übertragen. Zunächst geben wir folgende Definition: Ist $\mathfrak{r}$ ein Vektor der Gestalt (1), so sei

$$\varepsilon(\mathfrak{r}) = \sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon(r_\nu) \tag{7}$$

dabei ist wie bisher $\varepsilon(i)$ der Exponent, zu dem die Primzahl p — welche im folgenden immer festgehalten sei — in der Primzahlzerlegung von $i!$ vorkommt.

Es sei nun V_{p^e} der von allen k-zeiligen Vektoren aus Elementen des Restklassenringes mod p^e gebildete Vektorraum ($e > 1$). Nach [1], § 1 bilden alle die eindeutigen Abbildungen von V_{p^e} in sich, die sich mit Hilfe eines ganzzahligen Polynomvektors $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ schreiben lassen in der Gestalt

$$\mathfrak{i} \to \mathfrak{f}(\mathfrak{i}) \qquad \mathfrak{i} \text{ durchläuft } V_{p^e}$$

eine Halbgruppe $\overline{\mathfrak{H}}_{p^e}^k$.

Wir müssen nun zunächst [3], Satz I auf unseren Fall übertragen. Wir führen folgenden k-dimensionalen Vektor ein:

$$\mathfrak{e} = (1, 1 \ldots 1) \tag{8}$$

Weiter bezeichnen wir mit $\mathfrak{k}$ die Vektoren folgender Gestalt:

$$\mathfrak{k} = (u_1, u_2 \ldots u_k) \qquad 0 \leqq u_i \leqq p - 1 \tag{9}$$

und mit $\mathfrak{x}$ die Vektoren folgender Gestalt

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2 \ldots x_k) \qquad 0 \leqq x_i \leqq p^{e-1} - 1 \tag{10}$$

Läßt man nun in dem Vektor $\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x}$ das $\mathfrak{k}$ alle Vektoren (9) und das $\mathfrak{x}$ alle Vektoren (10) durchlaufen, so erhält man ersichtlich ein genaues Vertretersystem für V_{p^e}.

Wir beweisen also nun

Satz 7: *Die Menge der eindeutigen Abbildungen von V_{p^e} in sich, welche man erhält, wenn man in*

$$\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x} \to \sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{r}} p^{\sigma(\mathfrak{r})} \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} \bmod p^e \tag{11}$$

jeden der Vektoren $\mathfrak{a}_{\mathfrak{r}}$ unabhängig von den anderen folgende Werte annehmen läßt:

$$0 \leqq \mathfrak{a}_{\mathfrak{r}} \leqq (p^{e-\sigma(\mathfrak{r})-\varepsilon(\mathfrak{r})} - 1)\,\mathfrak{e} \tag{12}$$

(dabei ist $p^\nu = 1$ zu setzen für $\nu \leqq 0$) enthält nur Abbildungen von $\overline{\mathfrak{H}}^k_{p^e}$, und zwar jede Abbildung von $\overline{\mathfrak{H}}^k_{p^e}$ genau einmal.

Beweis:

1. In (11) ist jede Abbildung von $\overline{\mathfrak{H}}^k_{p^e}$ mindestens einmal enthalten: Denn wir können die Abbildung von $\overline{\mathfrak{H}}^k_{p^e}$ folgendermaßen geschrieben denken:

$$\mathfrak{i} \to \mathfrak{f}(\mathfrak{i}) \qquad \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \text{ ganzzahliger Polynomvektor} \tag{13}$$

also auch folgendermaßen:

$$\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x} \to \mathfrak{f}(\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x}) \bmod p^e$$

Wir können nun auf $\mathfrak{f}(\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x})$ den Satz von *Taylor* anwenden:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x}) \equiv \sum_{0 \leqq \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{u}} \mathfrak{b}_{\mathfrak{r}} p^{\sigma(\mathfrak{r})} \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} \bmod p^e$$

wenn etwa gesetzt wird $\mathfrak{u} = (e-1)\,\mathfrak{e}$.

Die Abbildung (13) läßt sich also auch folgendermaßen schreiben:

$$\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x} \to \sum_{0 \leqq \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{u}} \mathfrak{b}_{\mathfrak{r}} p^{\sigma(\mathfrak{r})} \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} \bmod p^e \tag{14}$$

das heißt, aus den p^k Abbildungen zusammensetzen, welche man erhält, wenn man in (14) $\mathfrak{k}$ alle Vektoren von (9) durchlaufen läßt. Sind $\mathfrak{r}_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{x})$ irgendwelche Restpolynomvektoren mod p^e, so kann ich die Abbildung (13) ersichtlich auch so schreiben:

$$\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x} \to \sum_{0 \leqq \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{u}} \mathfrak{b}_{\mathfrak{r}} p^{\sigma(\mathfrak{r})} \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{x}) \bmod p^e.$$

Bevor wir den Beweis fortsetzen, haben wir nun zunächst einen Hilfssatz zu formulieren, den wir gleich verwenden werden:

Ist $\mathfrak{i} \geqq 0$, so gibt es stets ein Restpolynom mod p^e von folgender Gestalt:

$$t_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{x}) = p^{e-\sigma(\mathfrak{i})-\varepsilon(\mathfrak{i})} p^{\sigma(\mathfrak{i})} \mathfrak{x}^{\mathfrak{i}} + \sum_{\mathfrak{j} < \mathfrak{i}} t_{\mathfrak{j}}\, p^{\sigma(\mathfrak{j})} \mathfrak{x}^{\mathfrak{j}} \tag{15}$$

Beweis: Wie in [1] setzen wir $r_0(x) = 1$, $r_i(x) = \prod_{\nu=0}^{i-1} (x - \nu)$ für $i > 0$. Dann ist ein Polynom der verlangten Gestalt gegeben durch

$$t_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{x}) = p^{e-\sigma(\mathfrak{i})-\varepsilon(\mathfrak{i})}\, p^{\sigma(\mathfrak{i})} \prod_{\nu=1}^{k} r_{i_\nu}(x_\nu).$$

Es ist ja doch

$$t_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{x}) = \begin{cases} p^{\sigma(\mathfrak{i})} \prod_{\nu=1}^{k} r_{i_\nu}(x_\nu) \text{ für } \sigma(\mathfrak{i}) \geqq e - \varepsilon(\mathfrak{i}) \\ p^{e-\varepsilon(\mathfrak{i})} \prod_{\nu=1}^{k} r_{i_\nu}(x_\nu) \text{ für } \sigma(\mathfrak{i}) < e - \varepsilon(\mathfrak{i}) \end{cases}$$

und nach [1], § 6, Zusatz a ist $t_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{x})$ Restpolynom mod p^e. Denkt man sich in $t_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{x})$ nach Potenzprodukten der x_ν geordnet, so erkennt man, daß man wegen $\sigma(\mathfrak{j}) \leqq \sigma(\mathfrak{i})$ für $\mathfrak{j} \leqq \mathfrak{i}$ tatsächlich auf die Gestalt (15) kommt.

Wir denken uns nun eine der p^k Abbildungen, aus denen sich (14) zusammensetzt, genommen. Zu dieser Abbildung addieren wir zunächst einen Restpolynomvektor

$$t_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{x})\, \mathfrak{a}$$

mit geeignet gewähltem ganzzahligen Vektor $\mathfrak{a}$ und erhalten dadurch wieder eine Abbildung der Gestalt (14), wobei aber jetzt

$$\mathfrak{o} \leqq \mathfrak{b}_{\mathfrak{tu}} \leqq (p^{e-\sigma(\mathfrak{u})-\varepsilon(\mathfrak{u})} - 1)\, \mathfrak{e}$$

ist. Dann nehmen wir unter den $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{o} \leqq \mathfrak{r} < \mathfrak{u}$ ein in deren Halbordnung maximales Element $\mathfrak{v}$ und addieren einen geeigneten Vektor $t_{\mathfrak{v}}(\mathfrak{x})\, \mathfrak{a}$, wodurch $\mathfrak{b}_{\mathfrak{tv}}$ in die in Satz 7 angegebenen Grenzen kommt. Unter den nach Weglassen von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ gebliebenen Vektoren nehmen wir wieder einen maximalen und gehen genau so vor. Bei jedem dieser Schritte wird an Koeffizienten $\mathfrak{b}_{\mathfrak{tr}}$, welche schon früher in die Grenzen (12) gedrückt wurden, nichts mehr geändert: Denn nehme ich diesen Schritt für $\mathfrak{z}$ vor, so werden nur Koeffizienten $\mathfrak{b}_{\mathfrak{tr}}$ mit $\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{z}$ noch geändert; wäre so ein $\mathfrak{r}$ ein schon früher behandelter Index, so wäre, da $\mathfrak{r}$ ja maximales Element war, $\mathfrak{r} = \mathfrak{z}$.

Daher kann ich durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens die Koeffizienten $\mathfrak{b}_{\mathfrak{tr}}$ in die Grenzen (12) drücken. Führe ich das für jede der p^k Abbildungen durch, so erhalte ich wirklich eine Darstellung dieser Abbildung von der in Satz 7 angegebenen Form.

2. In (11) kommt keine Abbildung mehr als einmal vor: Würden nämlich etwa:

$$\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x} \to \Sigma\, \mathfrak{a}_{\mathfrak{tr}}\, p^{\sigma(\mathfrak{r})}\, \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} \bmod p^e$$

$$\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x} \to \Sigma\, \mathfrak{b}_{\mathfrak{tr}}\, p^{\sigma(\mathfrak{r})}\, \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} \bmod p^e$$

aus (11) die selbe Abbildung darstellen, dann wäre für jedes $\mathfrak{k}$

$$\Sigma (a_{\mathfrak{k}\mathfrak{r}} - b_{\mathfrak{k}\mathfrak{r}})\, p^{\sigma(\mathfrak{r})}\, \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} \equiv \mathfrak{o} \bmod p^e \text{ für } \mathfrak{o} \leqq \mathfrak{x} \leqq (p^{e-1} - 1)\,\mathfrak{e}.$$

Nun ist aber

$$\Sigma\, c_{\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\, p^{\sigma(\mathfrak{r})} (\mathfrak{x} + p^{e-1}\,\mathfrak{y})^{\mathfrak{r}} \equiv \Sigma\, c_{\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\, p^{\sigma(\mathfrak{r})}\, \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} \bmod p^e \quad \text{für ganzes } \mathfrak{y}$$

also wäre

$$\Sigma (a_{\mathfrak{k}\mathfrak{r}} - b_{\mathfrak{k}\mathfrak{r}})\, p^{\sigma(\mathfrak{r})}\, \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} = \Sigma\, c_{\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\, p^{\sigma(\mathfrak{r})}\, \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}}$$

Restpolynomvektor mod p^e, also jede seiner Komponenten Restpolynom mod p^e. Würde eine dieser Komponenten nicht identisch verschwinden, so gäbe es unter den nicht verschwindenden Gliedern dieser Komponente ein für die Anordnung $x_1, x_2 \ldots x_k$ der Unbestimmten lexikographisch erstes; dieses sei etwa

$$c\, p^{\sigma(\mathfrak{t})}\, \mathfrak{x}^{\mathfrak{t}}$$

Nach [1], Hilfssatz 5 wäre

$$c \equiv 0 \bmod p^{e-\sigma(\mathfrak{t})-\varepsilon(\mathfrak{t})}$$

wegen (12) aber auch

$$|c| < p^{e-\sigma(\mathfrak{t})-\varepsilon(\mathfrak{t})}$$

also doch $c = 0$.

3. Jede Abbildung (11) ist eine Abbildung von $\overline{\mathfrak{H}}^k_{p^e}$. Zum Beweis führen wir im Anschluß an [3], § 1, Punkt c folgende Polynome ein:

$$t_{\mathfrak{w}\mathfrak{r}}(\mathfrak{x}) = \prod_{\nu=1}^{k} t_{w_\nu}\, r_\nu(x_\nu) \tag{16}$$

für alle Vektoren $\mathfrak{w} \geqq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{r} \geqq \mathfrak{o}$. Dann gilt nach [3], (10a) ersichtlich:

$$t_{\mathfrak{w}\mathfrak{r}}(\mathfrak{w} + \mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} \bmod p^e \text{ für } \mathfrak{x} \equiv \mathfrak{o} \bmod p$$

$$t_{\mathfrak{w}\mathfrak{r}}(\mathfrak{x}) \equiv 0 \bmod p^e \text{ für } \mathfrak{x} \not\equiv \mathfrak{w} \bmod p$$

Wir bilden uns nun zu der gegebenen Abbildung (11) den Polynomvektor:

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{o} \leqq \mathfrak{w} \leqq \mathfrak{t}} \sum_{\mathfrak{o} \leqq \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{u}} a_{\mathfrak{w}\mathfrak{r}}\, t_{\mathfrak{w}\mathfrak{r}}(\mathfrak{x}) \tag{17}$$

wenn $\mathfrak{t} = (p-1)\,\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{u} = (e-1)\,\mathfrak{e}$ gesetzt ist. Für diesen gilt:

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{w}} \sum_{\mathfrak{r}} a_{\mathfrak{w}\mathfrak{r}}\, t_{\mathfrak{w}\mathfrak{r}}(\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x}) \equiv \sum_{\mathfrak{r}} a_{\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\, t_{\mathfrak{k}\mathfrak{r}}(\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x}) \equiv \sum_{\mathfrak{r}} a_{\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\, p^{\sigma(\mathfrak{r})}\, \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} \bmod p^e$$

und zwar gilt dies für jeden Wert von $\mathfrak{k}$. Also läßt sich (11) auch schreiben als

$$\mathfrak{i} \to \mathfrak{g}(\mathfrak{i}) \bmod p^e \quad \mathfrak{i} \text{ durchläuft } V_{p^e},$$

die Abbildung (11) gehört also zu $\overline{\mathfrak{H}}^k_{p^e}$.

Wir können auf Grund von Satz 7 nun leicht die Anzahl der Elemente von $\overline{\mathfrak{H}}_{p^e}^k$ abzählen. Wir erhalten für diese Anzahl, welche wir mit $\beta_k(p^e)$ bezeichnen wollen, folgenden Ausdruck:

$$\beta_k(p^e) = p^{Skp^k} \tag{18}$$

wobei gilt

$$S = \sum_{\mathfrak{r}} (e - \sigma(\mathfrak{r}) - \varepsilon(\mathfrak{r})) \tag{19}$$

wobei also die Summe über alle $\mathfrak{r}$ zu erstrecken ist, für welche der Klammerausdruck positiv ist.

Nun können wir die Anzahl der Elemente von $\overline{\mathfrak{H}}_{p^e}^k$ aber auch berechnen auf Grund von [1], Hilfssatz 7. Hier ergibt sich

$$\beta_k(p^e) = p^{Tk} \tag{20}$$

wobei gilt

$$T = \sum_{\mathfrak{r}} (e - \varepsilon(\mathfrak{r})) \tag{21}$$

wobei die Summe wieder über alle $\mathfrak{r}$ zu erstrecken ist, für welche der Klammerausdruck positiv ist.

Vergleich von (18) und (20) ergibt:

$$p^k \sum_{\mathfrak{r}} (e - \sigma(\mathfrak{r}) - \varepsilon(\mathfrak{r})) = \sum_{\mathfrak{r}} (e - \varepsilon(\mathfrak{r}))$$

VIII. Wir haben nun aus den Abbildungen (11) von V_{p^e} in sich die umkehrbar eindeutigen herauszusuchen. Wir setzen wie üblich:

$$\mathfrak{e}_1 = (1, 0 \ldots 0), \quad \mathfrak{e}_2 = (0, 1 \ldots 0), \ldots, \mathfrak{e}_k = (0, 0 \ldots 1)$$

und beweisen

Satz 8: Genau die Abbildungen (11) *sind umkehrbar eindeutige Abbildungen von V_{p^e} auf sich, bei denen die Vektoren $\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}0}$ ein volles Vektorsystem mod p bilden und außerdem für jedes $\mathfrak{k}$ die Determinantenbedingung*

$$\left| \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}\mathfrak{e}_1}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}\mathfrak{e}_2} \ldots \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}\mathfrak{e}_k} \right| \not\equiv 0 \bmod p$$

erfüllt ist.

Beweis: Ist eine beliebige Abbildung (11) gegeben und $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ ein ganzzahliger Polynomvektor, der diese Abbildung erzeugt, so gilt:

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x}) \equiv \sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\, p^{\sigma(\mathfrak{r})}\, \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} \bmod p^e \tag{22}$$

für jeden ganzen Vektor $\mathfrak{x}$, oder, wenn wir links nach *Taylor* entwickeln:

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{k}) + p \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial\, \mathfrak{g}}{\partial\, x_\nu} (\mathfrak{k})\, x_\nu + p^2\, \mathfrak{h}_1(\mathfrak{x}) \equiv \sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\, p^{\sigma(\mathfrak{r})}\, \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}} \bmod p^e$$

dies gilt auch für $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$, das heißt:

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{f}) \equiv \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}_0} \bmod p^e \tag{23}$$

und man erhält nach Berücksichtigung von (23)

$$p \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial x_\nu}(\mathfrak{f})\, x_\nu \equiv p \sum_{\nu=1}^{k} \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}\mathfrak{e}_\nu}\, \mathfrak{x}^{\mathfrak{e}_\nu} \bmod p^2$$

oder

$$\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial x_\nu}(\mathfrak{f})\, x_\nu \equiv \sum_{\nu=1}^{k} \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}\mathfrak{e}_\nu}\, x_\nu \bmod p$$

Da dies für jeden ganzzahligen Vektor $\mathfrak{x}$ gilt, können wir hier setzen $\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_\nu$ für $\nu = 1, 2 \ldots k$ und erhalten

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial x_\nu}(\mathfrak{f}) \equiv \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}\mathfrak{e}_\nu} \bmod p \qquad \nu = 1, 2 \ldots k$$

woraus in der Bezeichnungsweise von [1], § 5 sogleich folgt:

$$D\,\mathfrak{g}(\mathfrak{f}) = \left| \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial x_1}(\mathfrak{f}), \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial x_2}(\mathfrak{f}) \ldots \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial x_k}(\mathfrak{f}) \right| \equiv \left| \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}\mathfrak{e}_2} \ldots \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}\mathfrak{e}_k} \right| \bmod p \tag{24}$$

Ist nun (11) eine umkehrbar eindeutige Abbildung von V_{p^e} auf sich, dann erzeugt $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ ein volles Vektorsystem mod p^e und aus [1], Hilfssatz 2 sowie aus (23) und (24) folgt, daß die Bedingungen von Satz 8 erfüllt sind. Sind umgekehrt die Bedingungen von Satz 8 erfüllt, dann erfüllt $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ die Bedingungen von [1], Hilfssatz 2, erzeugt also ein volles Vektorsystem mod p^e und die Abbildung (11) ist umkehrbar eindeutig.

Die Anzahl aller umkehrbar eindeutigen Abbildungen (11) ist die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}_{p^e}^k$. Für diese Anzahl erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$o(\mathfrak{G}_{p^e}^k) = \Pi_1 \Pi_2\, p^{Ukp^k}$$

wenn unter Verwendung der Bezeichnungsweise von [1], § 5 gesetzt wird

$$\Pi_1 = \prod_{\nu=0}^{p^k-1} (p^{ek} - \nu\, p^{(e-1)k}) = p^{(e-1)k\,p^k}\, p^k!$$

$$\Pi_2 = [\varphi_k(p)\, p^{(e-2)k^2}]^{p^k}$$

$$U = \sum_{\mathfrak{r}}{}' (e - \sigma(\mathfrak{r}) - \varepsilon(\mathfrak{r}))$$

Σ' bedeutet die Summation über alle $\mathfrak{r}$ mit $\sigma(\mathfrak{r}) \geqq 2$, für die der Klammerausdruck unter dem Summenzeichen positiv ist.

Wenn wir (18) und (19) berücksichtigen, können wir also auch schreiben:

$$o(\mathfrak{G}_{p^e}^k) = \beta_k(p^e)\,\frac{\Pi_1\quad \Pi_2}{p^{ek\,p^k}\;p^{(e-1)\,k^2\,p^k}} = \frac{p^k!\,[\varphi_k(p)]^{p^k}}{p^{k\,p^k(1+k)}}\,\beta_k(p^e) \tag{25}$$

In Analogie zu [3], Satz III, beweisen wir nun:

Satz 9: Man erhält jede Abbildung der zu $\mathfrak{G}_{p^e}^k$ isomorphen Permutationsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{p^e}^k$ genau einmal, aber keine anderen Abbildungen, wenn man in

$$\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x} \to \mathfrak{b}_\mathfrak{t} + p \sum_\mathfrak{r} \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}\mathfrak{r}}\,p^{\sigma(\mathfrak{r})-1}\,\mathfrak{x}^\mathfrak{r} \bmod p^e \tag{26}$$

die $\mathfrak{b}_\mathfrak{t}$ alle Permutationen der Vektoren $\mathfrak{k}$ von (9) durchlaufen läßt und die $\mathfrak{a}_{\mathfrak{t}\mathfrak{r}}$ in folgenden Grenzen variieren läßt:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{o} \leqq \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}\mathfrak{o}} \leqq (p^{e-1}-1)\,\mathfrak{e} \\ &\mathfrak{o} \leqq \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}\mathfrak{e}_\nu} \leqq (p^{e-1}-1)\,\mathfrak{e} \quad |\,\mathfrak{a}_{\mathfrak{t}\mathfrak{e}_1}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}\mathfrak{e}_2} \ldots \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}\mathfrak{e}_k}\,| \not\equiv 0 \bmod p \\ &\mathfrak{o} \leqq \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}\mathfrak{r}} \leqq (p^{e-\sigma(\mathfrak{r})-\varepsilon(\mathfrak{r})}-1)\,\mathfrak{e} \quad \textit{wenn } \sigma(\mathfrak{r}) < 1 \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Beweis: Da $\overline{\mathfrak{G}}_{p^e}^k$ genau aus den umkehrbar eindeutigen Abbildungen von (11) besteht, ergibt sich die Richtigkeit dieses Satzes genau so wie die des entsprechenden Satzes von [3].

IX. Bevor wir nun aus Satz 9 auf die Struktur von $\mathfrak{G}_{p^e}^k = \mathfrak{G}^k(p^e, 1)$ schließen, wollen wir noch die Überlegungen von [2], V verallgemeinern. Da beweisen wir zunächst den folgenden Hilfssatz:

Ist $\mathfrak{i} > \mathfrak{o}$ und $w \geqq 0$, so gibt es stets ein Restpolynom mod p^e von folgender Gestalt:

$$s_\mathfrak{i}(\mathfrak{x}) = p^{e-w[\sigma(\mathfrak{i})-1]-\varepsilon(\mathfrak{i})}\,p^{w[\sigma(\mathfrak{i})-1]}\,\mathfrak{x}^\mathfrak{i} + \sum_{\mathfrak{j}<\mathfrak{i}} t_\mathfrak{j}\,p^{w[\sigma(\mathfrak{j})-1]}\,\mathfrak{x}^\mathfrak{j} \tag{28}$$

Beweis: Ein Polynom dieser Gestalt ist gegeben durch

$$s_\mathfrak{i}(\mathfrak{x}) = p^{e-w[\sigma(\mathfrak{i})-1]-\varepsilon(\mathfrak{i})}\,p^{w[\sigma(\mathfrak{i})-1]} \prod_{\nu=1}^{k} r_{i_\nu}(x_\nu)$$

denn es ist ja

$$s_\mathfrak{i}(\mathfrak{x}) = \begin{cases} p^{w[\sigma(\mathfrak{i})-1]} \prod_{\nu=1}^{k} r_{i_\nu}(x_\nu) & \text{wenn } e - w[\sigma(\mathfrak{i})-1] \leqq \varepsilon(\mathfrak{i}) \\ p^{e-\varepsilon(\mathfrak{i})} \prod_{\nu=1}^{k} r_{i_\nu}(x_\nu) & \text{wenn } e - w[\sigma(\mathfrak{i})-1] > \varepsilon(\mathfrak{i}) \end{cases}$$

Nach [1], § 6, Zusatz a ist $s_\mathfrak{i}(\mathfrak{x})$ Restpolynom mod p^e. Denkt man sich $s_\mathfrak{i}(\mathfrak{x})$ nach Potenzprodukten der x_ν geordnet, so sieht man, daß das Polynom die durch (28) gegebene Gestalt hat.

Dieser Hilfssatz ermöglicht uns, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 10: *Man erhält ein genaues Vertretersystem der Gruppe* $\mathfrak{G}^k(p^e, p^w)$ *für* $1 \leqq w \leqq e$, *wenn man in dem Potenzreihenvektor*

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}_0 + \sum_{\mathfrak{r} > 0} (p^w)^{\sigma(\mathfrak{r})-1}\, \mathfrak{a}_\mathfrak{r}\, \mathfrak{x}^\mathfrak{r} \tag{29}$$

die Koeffizientenvektoren $\mathfrak{a}_\mathfrak{r}$ *in folgenden Grenzen variieren läßt*:

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqq \mathfrak{a}_0 \leqq (p^e - 1)\,\mathfrak{e} \\ &0 \leqq \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}_\nu} \leqq (p^e - 1)\,\mathfrak{e} \quad | \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}_1}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}_2} \ldots \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}_k} | \not\equiv 0 \bmod p \\ &0 \leqq \mathfrak{a}_\mathfrak{r} \leqq (p^{e - w[\sigma(\mathfrak{r})-1] - \varepsilon(\mathfrak{r})} - 1)\,\mathfrak{e} \quad \textit{für } \sigma(\mathfrak{r}) > 1 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Beweis: Dieser erfolgt im Prinzip genau so wie der des entsprechenden Satzes 7 von [2]. Zunächst besitzt nämlich jedes $F \in \mathfrak{G}^k(p^e, p^w)$ einen Vertretervektor

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{b}_0 + \sum_{0 < \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{t}} (p^w)^{\sigma(\mathfrak{r})-1}\, \mathfrak{b}_\mathfrak{r}\, \mathfrak{x}^\mathfrak{r}$$

Man addiert nun zu $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ einen Vektor $s_\mathfrak{t}(\mathfrak{x})\,\mathfrak{c}$, wo $\mathfrak{c}$ ein geeignet gewählter ganzzahliger Vektor ist, und drückt so zunächst das $\mathfrak{b}_\mathfrak{t}$ in die Grenzen von (30); die anderen Koeffizientenvektoren ändern dabei ihre Gestalt nicht. Nun nehme ich von den Vektoren mit $\mathfrak{r} < \mathfrak{t}$ einen in der Halbordnung dieser Vektoren maximalen $\mathfrak{u}$ und drücke das $\mathfrak{b}_\mathfrak{u}$ in die Grenzen von (30). Dieses Verfahren setze ich weiter fort. Genau so wie beim Beweis von Satz 7, Punkt 1, erkennt man, daß bei keinem dieser Schritte vorher schon behandelte Koeffizientenvektoren nochmals beeinflußt werden, und so erhalte ich schließlich einen Vertreter der Gestalt (29) für F, dessen Koeffizienten in den Grenzen von (30) liegen. Da dieses $\mathfrak{p}(\mathfrak{x})$ ein volles Vektorsystem mod p^e, also auch mod p erzeugt, erzeugt auch

$$\bar{\mathfrak{p}}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}_0 + \sum_{\nu=1}^{k} \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}_\nu}\, x_\nu$$

ein volles Vektorsystem mod p, daher gilt

$$| \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}_1}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}_2} \ldots \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}_k} | \not\equiv 0 \bmod p$$

Umgekehrt vertritt jeder Potenzreihenvektor $\mathfrak{p}(\mathfrak{x})$ von Satz 10 ein Element von $\mathfrak{G}^k(p^e, p^w)$, denn wegen

$$| \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}_1}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}_2} \ldots \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}_k} | \not\equiv 0 \bmod p$$

erzeugt er ein volles Vektorsystem mod p. Weiter gilt für seine Funktionaldeterminante:

$$D\,\mathfrak{p}(\mathfrak{f}) \equiv | \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}_1}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}_2} \ldots \mathfrak{a}_{\mathfrak{e}_k} | \not\equiv 0 \bmod p \text{ für ganzes } \mathfrak{f}.$$

Nach [1], Hilfssatz 2 erzeugt also $\mathfrak{p}(\mathfrak{x})$ ein volles Vektorsystem mod p^e.

Wäre die Differenz zweier Vektoren (29) Restpolynomvektor mod p^e, so wäre jede Komponente dieser Differenz Restpolynom mod p^e. Würde eine dieser Komponenten nicht identisch verschwinden, so gäbe es unter den nicht verschwindenden Gliedern dieser Komponente ein für die Anordnung $x_1, x_2 \ldots x_k$ der Unbestimmten lexikographisch erstes; dieses sei etwa

$$c\, p^{w[\sigma(\mathfrak{t})-1]}\, \mathfrak{x}^{\mathfrak{t}}$$

Nach [1], Hilfssatz 5 wäre

$$c\, p^{w[\sigma(\mathfrak{t})-1]} \equiv 0 \bmod p^{e-\varepsilon(\mathfrak{t})}$$

$$c \equiv 0 \bmod p^{e-w[\sigma(\mathfrak{t})-1]-\varepsilon(\mathfrak{t})}$$

wegen (30) aber auch

$$|\, c\,| < p^{e-w[\sigma(\mathfrak{t})-1]-\varepsilon(\mathfrak{t})}$$

also doch $c = 0$.

Wir können nun die Ordnung $o_k(e, w)$ von $\mathfrak{G}^k(p^e, p^w)$ leicht ausrechnen, indem wir die Anzahl der Elemente des Vertretersystemes von Satz 10 abzählen. Wir erhalten da den — für $1 \leqq w \leqq e$ gültigen — Ausdruck

$$o_k(e, w) = p^{ek}\, \varphi_k(p)\, p^{(e-1)k^2}\, p^{kT}$$

$$T = \sum_{\mathfrak{t}}{}' \{e - w[\sigma(\mathfrak{t}) - 1] - \varepsilon(\mathfrak{t})\}$$

wo Σ' Summation über alle $\mathfrak{t}$ mit $\sigma(\mathfrak{t}) > 1$ bedeutet, für die der Klammerausdruck in der Summe positiv ist.

Setzen wir

$$S = e - k + \sum_{\mathfrak{t} > 0} \{e - w[\sigma(\mathfrak{t}) - 1] - \varepsilon(\mathfrak{t})\} \tag{31}$$

(die Summe wieder erstreckt über alle $\mathfrak{t}$ mit positivem Klammerausdruck), so erhalten wir:

$$o_k(e, w) = \varphi_k(p)\, p^{kS} \tag{32}$$

Bilden wir uns S aus (31) auch für $w = 0$, so erhalten wir in Analogie zu [2], (12) die für $e > 1$ gültige Formel:

$$o_k(e, 0) = \frac{p^k\,![\varphi_k(p)]^{p^k}}{p^{kp^k(1+k)-k^2}}\, p^{kS} \tag{33}$$

X. Nun können wir die Struktur von $\mathfrak{G}^k(p^e, 1)$ leicht feststellen: Nach Satz 9 und Satz 10 besteht nämlich eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen $F \in \mathfrak{G}^k(p^e, 1)$ und allen $p^k + 1$-Tupeln der Gestalt

$$(\pi; T_\mathfrak{k}); \quad \pi \in \mathfrak{S}_{p^k} \quad T_\mathfrak{k} \in \mathfrak{G}^k(p^{e-1}, p) \quad \mathfrak{o} \leqq \mathfrak{k} \leqq (p-1)\,\mathfrak{e} \tag{34}$$

Es mögen zwei Elemente F, G aus $\mathfrak{G}^k(p^e, 1)$ und ihr Produkt FG vorliegen. Die ihnen entsprechenden Abbildungen (26) von $\overline{\mathfrak{G}}^k_{p^e}$ schreiben wir rechts daneben:

$$F \quad \mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x} \to \varphi \mid \mathfrak{k} + p\,\mathfrak{f}_\mathfrak{k}(\mathfrak{x}) \bmod p^e \quad \varphi \in \mathfrak{S}_{p^k}$$

$$G \quad \mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x} \to \psi \mid \mathfrak{k} + p\,\mathfrak{g}_\mathfrak{k}(\mathfrak{x}) \bmod p^e \quad \psi \in \mathfrak{S}_{p^k}$$

$$FG \quad \mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x} \to \omega \mid \mathfrak{k} + p\,\mathfrak{h}_\mathfrak{k}(\mathfrak{x}) \bmod p^e \quad \omega \in \mathfrak{S}_{p^k}$$

Nun erhalte ich die dem FG entsprechende Abbildung aber auch durch Zusammensetzen der dem F und der dem G entsprechenden Abbildung, also kann ich dafür auch schreiben:

$$\mathfrak{k} + p\,\mathfrak{x} \to \varphi\,\psi \mid \mathfrak{k} + p\,\mathfrak{f}_{\psi|\mathfrak{k}}\,(\mathfrak{g}_\mathfrak{k}(\mathfrak{x})) \mod p^e$$

also

$$\omega \mid \mathfrak{k} + p\,\mathfrak{h}_\mathfrak{k}(\mathfrak{x}) \equiv \varphi\,\psi \mid \mathfrak{k} + p\,\mathfrak{f}_{\psi|\mathfrak{k}}\,(\mathfrak{g}_\mathfrak{k}(\mathfrak{x})) \mod p^e$$

$$\omega = \varphi\,\psi \quad \mathfrak{h}_\mathfrak{k}(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{f}_{\psi|\mathfrak{k}}(\mathfrak{g}_\mathfrak{k}(\mathfrak{x})) \bmod p^{e-1} \text{ für ganzes } \mathfrak{x}.$$

Daraus folgt sogleich: Sind den Elementen F, G aus $\mathfrak{G}^k(p^e, 1)$ die p^k+1-Tupel $(\varphi; F_\mathfrak{k})$ bzw. $(\psi; G_\mathfrak{k})$ zugeordnet, so entspricht dem FG das folgende $p^k + 1$-Tupel:

$$(\varphi\,\psi; F_{\psi|\mathfrak{k}}\,G_\mathfrak{k}). \tag{35}$$

Definiert man also das Produkt $(\varphi; F_\mathfrak{k})\,(\psi; G_\mathfrak{k})$ durch (35), so wird die Menge der $p^k + 1$-Tupel (34) zu einer Gruppe, welche zu $\mathfrak{G}^k(p^e, 1)$ isomorph ist. Daraus folgt genau so wie in [3], § 3 die Richtigkeit des folgenden

Satz 11: *Die Gruppe* $\mathfrak{G}^k(p^e, 1)$ *ist isomorph zur Symmetrie*

$$\Sigma_{p^k}\,(\mathfrak{G}^k(p^{e-1}, p)).$$

Der Satz gilt auch noch für $e = 1$, wenn gesetzt wird $\mathfrak{G}^k(1, p) = \{E\}$, die nur aus dem Einheitselement bestehende Gruppe, denn es ist ja nach [1], Satz *V* die $\mathfrak{G}^k(p, 1)$ isomorph zur $\mathfrak{S}_{p^k}$.

Literatur

[1] Gruppen von Restklassen nach Restpolynomidealen in mehreren Unbestimmten. Monatsh. Math. **59**, 118—145 (1955).

[2] Eine Verallgemeinerung der eindimensionalen linearen Gruppe mod n. Monatsh. Math. **60**, 249—256 (1956).

[3] Gruppen von Restpolynomidealrestklassen nach Primzahlpotenzen. Monatsh. Math. **59**, 194—202 (1955).

[4] $\mathfrak{M}$-Untergruppen von Restklassengruppen. Monatsh. Math. **60**, 269—287 (1956).

Kontinuierliche Transformationsgruppen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten

Von

W. Gröbner, Innsbruck

(Eingegangen am 27. Dezember 1956)

Zusammenfassung: Auf die zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ gehörigen *Differentialkongruenzen*[1] wird die *Liesche Theorie der Transformationsgruppen*[2] angewendet und gezeigt, daß auf jeder irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit der Dimension d eine d-gliedrige kontinuierliche Gruppe von Transformationen der Mannigfaltigkeit in sich existiert. Die Transformationsgleichungen werden explizit aufgestellt; sie vermitteln gleichzeitig eine im allgemeinen umkehrbar eindeutige Abbildung der Mannigfaltigkeit auf einen gewissen Fundamentalbereich im Parameterraum, in dem sich die Transformationsgruppe als Gruppe der Translationen ausdrückt.

1. Die zu einem Primideal gehörigen Differentialoperatoren und Differentialkongruenzen

Zu einem homogenen Primideal $\mathfrak{p}$ der (homogenen) Dimension d eines Polynomringes $\mathfrak{k} = K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ gehören genau $d+1$ *Differentialoperatoren*[1]

[1] Den Begriff der „*Differentialoperatoren*" und der mit ihnen gebildeten „*Differentialkongruenzen*" habe ich zum ersten Mal in meiner Arbeit „Über eine neue idealtheoretische Grundlegung der algebraischen Geometrie", Math. Ann. **115** (1938), 333—358 entwickelt. Die wesentlichen Voraussetzungen für das Verständnis des obigen sind auch in meinem Buch „Moderne algebraische Geometrie. Die idealtheoretischen Grundlagen", Springer-Verlag, Wien und Innsbruck, 1949, S. 115f. enthalten.

Die obigen Ausführungen sind auf *homogene* Primideale und *homogene* Koordinaten beschränkt; den Übergang zu inhomogenen Koordinaten kann man in jedem Fall durch eine passend gewählte Substitution, etwa $x_0 = 1$, bewerkstelligen. Es wäre auch nicht schwierig, die Theorie von vornherein für inhomogene Ideale zu entwickeln.

[2] *S. Lie*, Theorie der Transformationsgruppen. I. Abschnitt. Unter Mitwirkung von *F. Engel*. Teubner, Leipzig, 1888.

$$D_i = \sum_{j=0}^{n} \vartheta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad i = 0, 1, \ldots, d \tag{1}$$

die modulo $\mathfrak{p}$ linear unabhängig sind und folgende charakteristische Eigenschaften haben:

(A) Die Differentialoperatoren sind homogen, d. h. die Formen ϑ_{ij} haben für jeden festen Index i alle denselben Grad μ_i; sie dürfen auch gebrochen sein, wenn nur der Nenner nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Ferner sind die Formen ϑ_{ij} nur modulo $\mathfrak{p}$ bestimmt; man könnte sie daher auch als Elemente des Restklassenringes $\mathfrak{k}/\mathfrak{p}$, beziehungsweise, falls sie gebrochen sind, als Elemente des Restklassenkörpers $\mathfrak{k}^*$ auffassen; $\mathfrak{k}^*$ wird auch der „Koordinatenkörper" der algebraischen Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$ genannt, die dem Primideal $\mathfrak{p}$ als Nullstellengebilde zugeordnet ist.

Den Grundkörper K setzen wir hier als algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 voraus, also etwa als den Körper der komplexen Zahlen.

(B) Jede Form f aus dem Primideal $\mathfrak{p}$ genügt sämtlichen *Differentialkongruenzen*:

$$D_i f = \sum_{j=0}^{n} \vartheta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \qquad i = 0, 1, \ldots, d \tag{2}$$

und umgekehrt liegt jede Form f aus $\mathfrak{k}$ eines Grades $\mu > 0$ im Primideal $\mathfrak{p}$, wenn sie alle Differentialkongruenzen (2) erfüllt. Daraus folgt insbesondere

$$D_i f \equiv D_i g \pmod{\mathfrak{p}} \text{ für } f \equiv g \pmod{\mathfrak{p}}, \; i = 0, 1, \ldots, d. \tag{3}$$

Wir dürfen daher die Differentialoperatoren (1) auch widerspruchsfrei als Operatoren auffassen, welche auf die Elemente des Restklassenringes $\mathfrak{k}/\mathfrak{p}$, oder auf diejenigen des Restklassenkörpers $\mathfrak{k}^*$ wirken; denn aus (3) folgt, daß ein Operator D_i, angewandt auf alle Elemente einer Restklasse (mod $\mathfrak{p}$), Resultate liefert, die alle in einer bestimmten Restklasse liegen.

Unter die Differentialoperatoren (1) kann auch immer der Operator

$$D_0 = \sum_{j=0}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{4}$$

aufgenommen werden, der wegen der Eulerschen Identität für beliebige Formen f des Grades μ aus $\mathfrak{k}$

$$D_0 f = \sum_{j=0}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \mu f \tag{5}$$

ergibt und daher zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ gehört.

Die Existenz der Differentialoperatoren und deren Eigenschaften folgt am einfachsten aus der Existenz einer Primbasis[3] für $\mathfrak{p}$:

$$\mathfrak{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_r) : \Phi, \tag{6}$$

wo $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ ein Hauptklassenideal des Ranges $r = n - d$ und Φ eine nicht in $\mathfrak{p}$ enthaltene Form ist. Ferner kann gezeigt werden, daß die Matrix $\left(\frac{\partial p_j}{\partial x_k}\right)$ den (mod $\mathfrak{p}$)-Rang r hat; d. h. diese Matrix hat an fast allen (nämlich allen einfachen) Punkten der Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$ den Rang r, nur in den singulären Punkten dieser Mannigfaltigkeit tritt eine Rangerniedrigung ein.

Daher hat das Gleichungssystem

$$X_0 \frac{\partial p_j}{\partial x_0} + X_1 \frac{\partial p_j}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial p_j}{\partial x_n} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \quad j = 1, \ldots, r \tag{7}$$

genau $d + 1$ modulo $\mathfrak{p}$ linear unabhängige Lösungssysteme

$$(X_0, X_1, \ldots, X_n) = (\vartheta_{i0}, \vartheta_{i1}, \ldots, \vartheta_{in}), \qquad i = 0, 1, \ldots, d$$

mit welchen wir die Differentialoperatoren (1) ansetzen können; dann sind zufolge (7) sämtliche Kongruenzen

$$D_i p_j = \sum_{j=0}^{n} \vartheta_{ik} \frac{\partial p_j}{\partial x_k} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \tag{8}$$

für alle Indizes $i = 0, 1, \ldots, d$ und $j = 1, 2, \ldots, r$ erfüllt. Daraus folgt nun aber auch, daß die Differentialkongruenzen (2) für jede Form f aus $\mathfrak{p}$ erfüllt sind; denn aus $f \in \mathfrak{p}$ folgt

$$\Phi f = \varphi_1 p_1 + \ldots + \varphi_r p_r, \qquad \varphi_j \in \mathfrak{k}$$

woraus man nach Anwendung des Operators D_i leicht die Kongruenz folgert:

---

[3] Bezüglich der *Primbasis* vgl. die oben zitierten Arbeiten; Formel (6) bedeutet in der üblichen Schreibweise, daß eine Form f aus $\mathfrak{k}$ dann und nur dann in $\mathfrak{p}$ enthalten ist, wenn $\Phi f \in (p_1, \ldots, p_r)$, d. h. wenn

$$\Phi f = \varphi_1 p_1 + \varphi_2 p_2 + \ldots + \varphi_r p_r$$

mit passenden Formen $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ aus $\mathfrak{k}$ darstellbar ist. Das Ideal $(p_1, \ldots, p_r)$ ist ein Hauptklassenideal, welches die isolierte Primärkomponente $\mathfrak{p}$ besitzt.

$$D_i(\Phi f) \equiv \Phi D_i f \equiv \sum_{j=0}^{n} (\varphi_j D_i p_j) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}};$$

wegen $\Phi \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ folgt (2).

Wie bereits bemerkt, können wir den Differentialoperator D_0 immer in der besonderen Gestalt (4) wählen; daraus folgt nun auch leicht die Umkehrung, denn genügt eine Form f aus $\mathfrak{k}$ allen Differentialkongruenzen (2), also auch $D_0 f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, so hat man wegen (5) unmittelbar $f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, falls nur der Grad μ von f nicht verschwindet, d. h. f keine Konstante ist[4].

Es ist sinnvoll, die Lösungen der Kongruenzen (7) innerhalb des Restklassenkörpers $\mathfrak{k}^*$ zu betrachten; dann bilden sie, und zugleich auch die Menge $\mathfrak{D}$ aller zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Differentialoperatoren einen Modul („Vektorraum") über dem Restklassenkörper $\mathfrak{k}^*$ als Multiplikatorenbereich:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{k}^* \{D_0, D_1, \ldots, D_d\}, \tag{9}$$

der von $d+1$ linear unabhängigen Operatoren $D_0, \ldots, D_d$ erzeugt wird. Jeder Differentialoperator aus $\mathfrak{D}$:

$$D = \chi_0 D_0 + \chi_1 D_1 + \ldots + \chi_d D_d = \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{n} \chi_i \vartheta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \chi_i \in \mathfrak{k}^* \tag{10}$$

gehört ebenfalls zum Primideal $\mathfrak{p}$, d. h. aus $f \in \mathfrak{p}$ folgt immer $Df \in \mathfrak{p}$. Die Operatoren $D_0, D_1, \ldots, D_d$ bilden als linear unabhängige eine Minimalbasis von $\mathfrak{D}$, d. h. zwei Operatoren sind dann und nur dann einander gleich, wenn ihre Darstellungen (10) übereinstimmen.

2. Der Liesche Ring aller Differentialoperatoren (mod $\mathfrak{p}$)

Im Bereich $\mathfrak{D}$ aller Differentialoperatoren (mod $\mathfrak{p}$) ist Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einem Element aus $\mathfrak{k}^*$ in naheliegender Weise erklärt. Dagegen versteht man unter dem Produkt $D_b D_a$ von zwei Differentialoperatoren (mod $\mathfrak{p}$) ihre aufeinanderfolgende Anwendung, also:

$$D_b D_a = \sum_{j,k} \vartheta_{bj} \frac{\partial}{\partial x_j} \vartheta_{ak} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{j,k} \left[\vartheta_{bj} \vartheta_{ak} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \vartheta_{bj} \frac{\partial \vartheta_{ak}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \right]; \tag{11}$$

dieser Operator gehört aber nicht mehr unserem Bereich $\mathfrak{D}$ an. Aber es ist mit Hilfe des Jacobischen Klammersymbols möglich, eine Multi-

[4] Dasselbe gilt sinngemäß auch dann, wenn f eine gebrochene Form aus $\mathfrak{k}^*$ ist.

plikation in $\mathfrak{D}$ zu definieren, deren Resultate wieder in $\mathfrak{D}$ enthalten sind und die unbeschränkt innerhalb $\mathfrak{D}$ ausführbar ist, aber allerdings weder kommutativ noch assoziativ ist, nämlich diese:

$$D_a \cdot D_b = D_a D_b - D_b D_a = \sum_{j,k} \left[\vartheta_{aj} \frac{\partial \vartheta_{bk}}{\partial x_j} - \vartheta_{bj} \frac{\partial \vartheta_{ak}}{\partial x_j} \right] \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{12}$$

Es gilt hier das distributive Gesetz:

$$D_a \cdot (D_b + D_c) = (D_a \cdot D_b) + (D_a \cdot D_c), \tag{13}$$

an Stelle des kommutativen Gesetzes:

$$D_a \cdot D_b = - D_b \cdot D_a, \text{ also insbesondere } D_a \cdot D_a = 0, \tag{14}$$

und an Stelle des assoziativen Gesetzes die „Jacobische Identität":

$$((D_a \cdot D_b) \cdot D_c) + ((D_b \cdot D_c) \cdot D_a) + ((D_c \cdot D_a) \cdot D_b) = 0. \tag{15}$$

Unter Zugrundelegung dieser Multiplikation ist der Bereich $\mathfrak{D}$ *aller Differentialoperatoren (mod* $\mathfrak{p}$*) ein Lieschер Ring, der als Linearformen-Modul des Ranges* $d + 1$ *über dem Koordinatenkörper* $\mathfrak{k}^*$ *des Primideals* $\mathfrak{p}$ *dargestellt werden kann; hier bedeutet* d *die (homogene) Dimension von* $\mathfrak{p}$.

Zum Beweise müssen wir nur noch hinzufügen, daß das Produkt $D_a \cdot D_b$ von zwei Differentialoperatoren aus $\mathfrak{D}$ notwendig wieder in $\mathfrak{D}$ liegt, weil gleichzeitig mit D_a und D_b auch der Operator $D_a \cdot D_b$ jede Form f aus dem Primideal $\mathfrak{p}$ annulliert:

$$\text{aus } f \in \mathfrak{p} \text{ folgt } (D_a \cdot D_b) f = D_a(D_b f) - D_b(D_a f) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Für die Differentialoperatoren einer Basis (9) von $\mathfrak{D}$ müssen also Formeln folgender Art bestehen:

$$D_i \cdot D_k \equiv \sum_{l=0}^{n} \chi_{ik}^l D_l \pmod{\mathfrak{p}}, \text{ mit } \chi_{ik}^l \in \mathfrak{k}^*, \; i, k = 0, \ldots, d. \tag{16}$$

Man prüft übrigens auch leicht nach, daß für den in (4) definierten Operator D_0 und jeden anderen zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Operator $D = \sum \vartheta_k \frac{\partial}{\partial x_k}$, dessen Komponenten ϑ_k den Grad μ haben, immer gilt:

$$D_0 \cdot D = (\mu - 1) D. \tag{17}$$

Von einer Basis $\{D_0, D_1, \ldots, D_d\}$ unseres Lieschen Ringes $\mathfrak{D}$ können wir durch eine nicht singuläre lineare homogene Transformation über $\mathfrak{k}^*$ zu einer neuen Basis $\{D_0^*, D_1^*, \ldots, D_d^*\}$ übergehen. Man kann leicht erreichen, daß in den neuen Basisoperatoren sämtliche Produkte $D_i^* \cdot D_k^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ sind. Da nämlich die aus den Komponenten

ϑ_{ik} gebildete Matrix (ϑ_{ik}) von $d+1$ Zeilen und $n+1$ Spalten ($i = 0, 1, \ldots, d$; $k = 0, 1, \ldots, n$) über $\mathfrak{f}^*$ den Rang $d+1$ hat, können wir etwa voraussetzen, daß die aus den ersten $d+1$ Spalten gebildete quadratische Matrix regulär sei; multiplizieren wir mit der reziproken Matrix, so erhalten wir eine neue Basis für $\mathfrak{D}$ von der folgenden speziellen Gestalt:

$$\begin{aligned}
D_0^* &= \frac{\partial}{\partial x_0} + \vartheta^*_{0,d+1}\frac{\partial}{\partial x_{d+1}} + \ldots + \vartheta^*_{0,n}\frac{\partial}{\partial x_n},\\
D_1^* &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \vartheta^*_{1,d+1}\frac{\partial}{\partial x_{d+1}} + \ldots + \vartheta^*_{1,n}\frac{\partial}{\partial x_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (18)\\
D_d^* &= \frac{\partial}{\partial x_d} + \vartheta^*_{d,d+1}\frac{\partial}{\partial x_{d+1}} + \ldots + \vartheta^*_{d,n}\frac{\partial}{\partial x_n}.
\end{aligned}$$

Hier müssen alle Produkte $D_i^* \cdot D_k^*$ verschwinden, denn einerseits gilt (16), andererseits bestätigt man leicht direkt, daß in $D_i^* \cdot D_k^*$ die ersten $d+1$ Glieder ausfallen.

Anstelle von (18) werden wir im folgenden gewöhnlich die folgende Basis verwenden, die ebenfalls $D_i \cdot D_k \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ erfüllt[5] und den homogenen Koordinaten besser angepaßt ist:

$$\begin{aligned}
D_0 &= x_0\frac{\partial}{\partial x_0} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_d\frac{\partial}{\partial x_d} + x_{d+1}\frac{\partial}{\partial x_{d+1}} + \ldots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n},\\
D_1 &= x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \vartheta_{1,d+1}\frac{\partial}{\partial x_{d+1}} + \ldots + \vartheta_{1,n}\frac{\partial}{\partial x_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (19)\\
D_d &= x_d\frac{\partial}{\partial x_d} + \vartheta_{d,d+1}\frac{\partial}{\partial x_{d+1}} + \ldots + \vartheta_{d,n}\frac{\partial}{\partial x_n}.
\end{aligned}$$

3. Die eingliedrigen Lieschen Gruppen auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit

Nach *S. Lie* kann ein zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehöriger Differentialoperator $D = \Sigma\,\vartheta_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ als eine *infinitesimale Transformation* der algebraischen Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$ aufgefaßt werden. Es sei nämlich $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

[5] Man beachte (17)!

irgendein Punkt dieser Mannigfaltigkeit, d. h. eine Nullstelle des Primideals $\mathfrak{p}$, und zwar eine solche, in welcher die Funktionen $\vartheta_0(x), \vartheta_1(x), \ldots, \ldots, \vartheta_n(x)$ stetig sind; dann führt die dem Operator D zugeordnete infinitesimale Transformation den Punkt $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dieser Mannigfaltigkeit in den benachbarten Punkt $\{x_0 + \vartheta_0\, dt, x_1 + \vartheta_1\, dt, \ldots, \ldots, x_n + \vartheta_n\, dt\}$ über, der ebenfalls auf der $AM(\mathfrak{p})$ liegt. Denn für jede Form $f(x)$ aus $\mathfrak{p}$ gilt bis auf infinitesimale Größen höherer Ordnung:

$$f(x + \vartheta\, dt) = f(x) + dt\, \Sigma\, \vartheta_k f_k'(x) = f(x) + dt(Df(x)) = 0,$$

weil $\{x\}$ als Nullstelle von $\mathfrak{p}$ auch im besonderen Nullstelle sowohl von $f(x)$ wie auch von $Df(x)$ ist.

Jedem Differentialoperator D entspricht in diesem Sinne eine bestimmte Fortschreitungsrichtung in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$, in welchem er stetig ist und nicht identisch verschwindet. Es ist zweckmäßig, den Operator D_0 hier auszuschließen, weil er jeden Punkt mit homogenen Koordinaten in den gleichen Punkt überführt, da die Koordinaten dabei nur den gemeinsamen Faktor $1 + dt$ erhalten. Dagegen sind den Operatoren $D_1, D_2, \ldots, D_d$ einer Basis (9) von $\mathfrak{D}$ genau d linear unabhängige Fortschreitungsrichtungen in jedem allgemeinen[6] Punkt der $AM(\mathfrak{p})$ zugeordnet, die zusammen einen linearen Vektorraum aufspannen, nämlich den d-dimensionalen Tangentialraum der $AM(\mathfrak{p})$ im betrachteten Punkt.

Um die „endlichen Gleichungen" für die infinitesimale Transformation D zu ermitteln, gehen wir von dem folgenden System von Differentialgleichungen[7] aus:

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} = \vartheta_k(X_0, X_1, \ldots, X_n), \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Sind $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ die homogenen Koordinaten eines Punktes P des projektiven Raumes[8] S_n, in dem die Formen ϑ_k stetig und also auch holomorph sind, so gibt es nach bekannten Sätzen[9] genau ein System von Lösungsfunktionen

---

[6] Das sind alle Punkte, in denen die ϑ_{ij} stetig sind und ihre Matrix keine Rangerniedrigung erleidet. Wenn wir alle ϑ_{ij} ganz voraussetzen, so werden im allgemeinen nur die singulären Punkte der $AM(\mathfrak{p})$ Ausnahmen bilden.

[7] Das System (20) heißt *autonom*, weil die Variable t auf der rechten Seite nicht explizit vorkommt. Darauf sind die für uns wichtigen besonderen Eigenschaften der Lösungen begründet.

[8] Nicht notwendig der Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$.

[9] Vgl. etwa: *G. Sansone*, Equazioni differenziali nel campo reale. Parte prima. Zanichelli, Bologna, 1941, p. 116 ss.

$$X_k = \varphi_k(x_0, x_1, \ldots, x_n; t), \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{21}$$

welche in bezug auf die komplexe Variable t holomorph in einer gewissen Umgebung von $t = 0$ sind, welche ferner in (20) eingesetzt diese Gleichungen identisch befriedigen und den Anfangsbedingungen

$$\varphi_k(x_0, x_1, \ldots, x_n; 0) = x_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n \tag{22}$$

genügen.

Ist nun t' ein Wert innerhalb des Konvergenzbereiches der Reihen (21), so ist auch der Punkt P' mit den Koordinaten

$$x_k' = \varphi_k(x_0, x_1, \ldots, x_n; t'), \qquad k = 0, 1, \ldots, n \tag{23}$$

wieder ein regulärer Punkt[10] für D und wir können die Lösungen von (20) aufstellen, welche für $t = 0$ durch den Punkt P' gehen. Diese Lösungen sind einerseits die für die Anfangswerte x' gebildeten Funktionen (22):

$$X_k = \varphi_k(x_0', x_1', \ldots, x_n'; t), \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{24}$$

andererseits aber auch die Funktionen

$$X_k = \varphi_k(x_0, x_1, \ldots, x_n; t' + t) \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{24'}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen müssen diese Funktionen miteinander identisch sein, d. h. es gilt allgemein

$$\varphi_k(x_0, x_1, \ldots, x_n; t'+t) = \varphi_k(x_0', x_1', \ldots, x_n'; t), \qquad k=0, 1, \ldots, n, \tag{25}$$

zunächst identisch für alle Werte t' und $t' + t$, die innerhalb des Konvergenzbereiches der Reihen (21) liegen; außerhalb desselben können wir die Funktionen (24) als analytische Fortsetzungen der Funktionen (21) ansehen.

Es zeigt sich so, daß die Lösungen (21) längs jedes Weges[11], der die vom Differentialoperator D vorgeschriebene Richtung[12] einhält und keinen Punkt berührt, in dem D unstetig wird oder identisch verschwindet, analytisch fortgesetzt werden kann. Die auf verschiedenen Wegen gewonnenen Fortsetzungen brauchen aber nicht überall über-

G. Sansone e *R. Conti*, Equazioni differenziali non lineari. Cremonese, Roma, 1956.

Die ersten Beweise sind von *Cauchy* und *Weierstraß* (1842), vgl. Math. Werke von *K. Weierstraß*, 1. Bd., S. 75—85.

[10] Die etwaigen singulären Punkte können nur auf der Peripherie des Konvergenzkreises liegen.

[11] Wir bezeichnen mit „Weg" eine reell ein-dimensionale Untermannigfaltigkeit der $AM(\mathfrak{p})$.

[12] Diese Fortschreitungsrichtung schneidet eine reell zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit aus.

einzustimmen, d. h. die Funktionen (21) werden im allgemeinen bei beliebigen analytischen Fortsetzungen nicht eindeutig bleiben.

Bedeutet nun $F(X)$ eine beliebige Form oder allgemeiner eine holomorphe Funktion der Variablen $X_0, X_1, \ldots, X_n$, so findet man mit Rücksicht auf (20):

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial t} = D^* F, \tag{26}$$

wo D^* den in den Variablen X_k geschriebenen Differentialoperator D bedeutet. Mehrmalige Wiederholung desselben Schlusses liefert:

$$\frac{\partial^\nu F}{\partial t^\nu} = D^{*\nu} F, \qquad \nu = 1, 2, \ldots \tag{27}$$

Da für $t = 0$ die Variablen X_k wegen (22) übergehen in x_k und auch der Operator D^*, der die Variable t nicht explizit enthält, in D übergeht, folgt daraus:

$$\left(\frac{\partial^\nu F}{\partial t^\nu}\right)_{t=0} = D^\nu F(x), \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{28}$$

eine Formel, die man in naheliegender Weise auch für $\nu = 0$ gelten lassen kann. Daraus leitet man für $F(X)$ die Taylorsche Reihe ab:

$$F(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu F(x) = F(x) + \frac{t}{1!} DF(x) + \frac{t^2}{2!} D^2 F(x) + \ldots \tag{29}$$

und daraus speziell für $F(X) = X_k$:

$$X_k = x_k + \frac{t}{1!} \vartheta_k(x) + \frac{t^2}{2!} D\vartheta_k(x) + \frac{t^3}{3!} D^2\vartheta_k(x) + \ldots \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{30}$$

Das sind nach *Lie* die „*endlichen Gleichungen*" der „*infinitesimalen Transformation*" D; es sind die Lösungsfunktionen (21) des Systems (20) und liegen daher ganz auf der algebraischen Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$, wenn der Anfangspunkt $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ auf ihr liegt. Denn ist $F(x)$ eine beliebige Form aus $\mathfrak{p}$, so verschwinden $F(x)$ und alle Ableitungen $D^\nu F(x)$ in der Nullstelle $\{x\}$ und infolgedessen auch $F(X)$ wegen (29) identisch in t; das heißt aber, daß der mit t veränderliche Punkt $\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ ständig Nullstelle von $\mathfrak{p}$ ist, also auf der $AM(\mathfrak{p})$ liegt.

Beispiel: Als Beispiel wählen wir das Primideal $\mathfrak{p} = (p)$ in $K[x_0, x_1, x_2]$, welches durch die Primform $p = x_0^3 + x_0 x_1 x_2 + x_1^3$ erzeugt wird. Die Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$ ist eine rationale Kurve 3. Ordnung mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt in $\{0, 0, 1\}$. Zu $\mathfrak{p}$ gehört unter anderen der Differentialoperator

$$D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{x_0^2}{x_1} - 2\frac{x_1^2}{x_0}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{31}$$

denn man bestätigt leicht: $Dp = p \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Die endlichen Gleichungen dieser infinitesimalen Transformation lauten gemäß (30):

$$X_0 = x_0,$$

$$X_1 = x_1 + x_1 \frac{t}{1!} + x_1 \frac{t^2}{2!} + \ldots = x_1 e^t, \tag{32}$$

$$X_2 = x_2 + \left(\frac{x_0^2}{x_1} - 2\frac{x_1^2}{x_0}\right)\frac{t}{1!} + \left(-\frac{x_0^2}{x_1} - 4\frac{x_1^2}{x_0}\right)\frac{t^2}{2!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{x_0 x_1}(x_0^3 + x_0 x_1 x_2 + x_1^3 - x_0^3 e^{-t} - x_1^3 e^{2t}).$$

Natürlich hätte man diese Entwicklungen übereinstimmend auch durch Integration der Differentialgleichungen (20) ableiten können:

$$\frac{\partial X_0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial X_1}{\partial t} = X_1, \quad \frac{\partial X_2}{\partial t} = \frac{X_0^2}{X_1} - 2\frac{X_1^2}{X_0}.$$

Der Punkt $\{X_0, X_1, X_2\}$ liegt für alle Werte t auf der Kurve $AM(\mathfrak{p})$, wenn der Anfangswert $\{x_0, x_1, x_2\}$ auf dieser liegt. Denn man bestätigt leicht durch Einsetzen von (32) die Identität:

$$p(X_0, X_1, X_2) = (x_0^3 + x_0 x_1 x_2 + x_1^3) e^t.$$

Die Funktionen (32) liefern also eine Parameterdarstellung der rationalen Kurve $AM(\mathfrak{p})$, aus der nur der Punkt im unendlichen $\{0, 0, 1\}$ ausgeschlossen ist. Man bestätigt an diesem Beispiel auch leicht die Formeln (25). Man kann auch sagen, die Formeln (32) und deren Umkehrungen

$$t = \int_{x_1}^{X_1} \frac{du}{u} = \int_{x_2}^{X_2} \frac{u\,dv}{1 - 2u^3} \quad \text{(auf } 1+u^3+uv=0\text{)}$$

vermitteln eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Kurve $AM(\mathfrak{p})$ auf die endliche t-Ebene. Die Gruppe der Translationen in der t-Ebene ergibt, auf die Kurve übertragen, die Gruppe der analytischen Transformationen der Kurve in sich (hier sind es sogar birationale Transformationen).

Es ist zu vermuten, daß das skalare Produkt eines Differentialoperators D mit einer Form $\varrho(x)$ aus $\mathfrak{k}^*$, das ist $\varrho(x)\,D$, keine von D wesentlich verschiedene Bedeutung besitzt; denn es ist ja die durch D bestimmte Fortschreitungsrichtung dieselbe wie diejenige durch $\varrho(x)\,D$ bestimmte. In der Tat sind die Charakteristiken der Lösungen in beiden Fällen identisch, es ändert sich nur der Parameter t.

An die Stelle von (20) treten nämlich die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial X_k^*}{\partial t^*} = \varrho(X^*)\,\vartheta_k(X^*), \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{33}$$

die in folgender Weise aufgespaltet werden können:

$$\frac{\partial X_k^*}{\partial t} = \vartheta_k(X^*), \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{34}$$

und

$$\frac{\partial t}{\partial t^*} = \varrho(X^*). \tag{35}$$

Die Lösungen von (34) sind wieder die Funktionen (21):

$$X_k^* = \varphi_k(x_0, x_1, \ldots, x_n; t), \qquad k = 0, 1, \ldots, n; \tag{36}$$

Setzt man diese Funktionen in (35) ein, so wird die rechte Seite eine bekannte Funktion der Anfangswerte x_k und t, so daß die Integration ausgeführt werden kann (in einem Gebiet, wo $\varrho(X^*) \neq 0$ ist):

$$t^* = \int_0^t \frac{dt}{\varrho(X^*)}; \tag{37}$$

diese Funktion ist in einer gewissen Umgebung von $t^* = 0$ eindeutig umkehrbar:

$$t = \psi(x_0, x_1, \ldots, x_n; t^*). \tag{38}$$

Mit dieser Substitution erhält man schließlich aus (36) die Lösungen von (33):

$$X_k^* = \varphi_k(x_0, x_1, \ldots, x_n; \psi(x_0, x_1, \ldots, x_n; t^*)), \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{39}$$

Ersetzt man den im obigen Beispiel betrachteten Differentialoperator D durch

$$D^* = \frac{x_0}{x_1} D = x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{x_0^3}{x_1^2} - 2x_1\right) \frac{\partial}{\partial x_2},$$

so erhält man nach (37), (36) und (32)

$$t^* = \frac{x_1}{x_0} \int_0^t e^t \, dt = \frac{x_1}{x_0} (e^t - 1)$$

oder als Umkehrung (38)

$$t = \log\left(1 + \frac{x_0}{x_1} t^*\right).$$

Durch Ausführung dieser Substitution in den früheren Lösungen (32) gewinnt man die neuen zu D^* gehörigen Lösungen:

$$X_0^* = x_0, \; X_1^* = x_1 + x_0 t^*,$$

$$X_2^* = \frac{x_1^2 x_2 + (x_0^3 + x_0 x_1 x_2 - 2x_1^3) t^* - 3 x_0 x_1^2 t^{*2} - x_0^2 x_1 t^{*3}}{x_1(x_1 + x_0 t^*)}.$$

Beispiel: Es sei $\mathfrak{p} = (p)$ das durch die Primform

$$p(x) = g_3 x_0^3 + g_2 x_0^2 x_1 + x_0 x_2^2 - 4 x_1^3$$

in $K[x_0, x_1, x_2]$ erzeugte Hauptideal, zu dem der Differentialoperator

$$D = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(-\frac{g_2}{2} + 6\frac{x_1^2}{x_0}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

gehört. Die algebraische Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$ ist eine elliptische Kurve in der Weierstraßschen Normalform. Die endlichen Gleichungen (30) sind hier unter der Voraussetzung, daß die Anfangswerte x_j auf der Kurve liegen ($p(x) = 0$):

$$X_0 = x_0,$$

$$X_1 = x_1 + x_2 t + \left(3\frac{x_1^2}{x_0} - \frac{g_2}{4}x_0\right)t^2 + 2\frac{x_1 x_2}{x_0}t^3 + \ldots,$$

$$X_2 = x_2 + \left(6\frac{x_1^2}{x_0} - \frac{g_2}{2}x_0\right)t + 6\frac{x_1 x_2}{x_0}t^2 + \left(20\frac{x_1^3}{x_0^2} - 3g_2 x_1 - 2g_3 x_0\right)t^3 + \ldots$$

Diese Reihen liefern eine Parameterdarstellung der elliptischen Kurve; sie sind auch die durch die Anfangswerte eindeutig festgelegten Lösungen der Differentialgleichungen (20):

$$\frac{\partial X_0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial X_1}{\partial t} = X_2, \quad \frac{\partial X_2}{\partial t} = -\frac{g_2}{2}X_0 + 6\frac{X_1^2}{X_0};$$

Diese Lösungen können auch durch die Weierstraßsche $\wp$-Funktion dargestellt werden: bestimmt man nämlich t_0 so, daß

$$\wp(t_0) = \frac{x_1}{x_0}, \quad \wp'(t_0) = \frac{x_2}{x_0}$$

ist, so sind die oben gewonnenen Lösungen identisch mit den folgenden:

$$X_0 = x_0, \quad X_1 = x_0\,\wp(t_0 + t), \quad X_2 = x_0\,\wp'(t_0 + t),$$

die zufolge der bekannten Relation $\wp'' = 6\,\wp^2 - \frac{g_2}{2}$ die Differentialgleichungen befriedigen und auch die vorgeschriebenen Anfangswerte erfüllen[13].

4. Die d-gliedrigen Lieschen Gruppen auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit der Dimension d

Es sei $AM(\mathfrak{p})$ eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension d, die zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehört. Dann können wir eine Basis $D_0, D_1, \ldots, D_d$ des Lieschen Ringes der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Differentialoperatoren in der Art (19) voraussetzen, also so, daß

$$D_i \cdot D_k = D_i D_k - D_k D_i = 0, \qquad i, k = 0, 1, \ldots, d \qquad (40)$$

gilt, oder mit anderen Worten so, daß die Basisoperatoren alle untereinander vertauschbar sind. Mit Rücksicht auf (12) können wir diese Bedingung auch so ausdrücken:

[13] Der Operator D enthält die Invariante g_3 nicht; sind daher die Anfangswerte $\{x_0, x_1, x_2\}$ vorgegeben, so kann g_3 nachträglich so bestimmt werden, daß dieser Punkt auf der elliptischen Kurve $p(x) = 0$ liegt.

$$\sum_{j=0}^{n} \vartheta_{ij} \frac{\partial \vartheta_{kl}}{\partial x_j} = \sum_{j=0}^{n} \vartheta_{kj} \frac{\partial \vartheta_{il}}{\partial x_j}, \qquad i, k, l = 0, 1, \ldots, d. \tag{41}$$

Den Operator D_0 können wir im folgenden unterdrücken, weil er bei homogenen Koordinaten keine Wirkung hat[14]. Dann bezeichnen wir jetzt mit $t_0, t_1, \ldots, t_d$ neue, von den x_j ganz unabhängige Variable, so daß sie mit allen Operatoren D_i vertauschbar sind, und setzen

$$t_0 D = t_1 D_1 + t_2 D_2 + \ldots + t_d D_d. \tag{42}$$

Dieser Operator D gehört wieder zum Primideal $\mathfrak{p}$ und besitzt also gemäß (30), wenn wir den dort mit t bezeichneten Parameter hier t_0 nennen, die Lösungen:

$$X_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (t_0 D)^\nu x_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (t_1 D_1 + \ldots + t_d D_d)^\nu x_k, \tag{43}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n;$$

wegen der Vertauschbarkeit (40) der Operatoren D_i können wir diese Entwicklungen auch so schreiben:

$$X_k = \varphi_k(x_0, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_d) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{\nu_d=0}^{\infty} \frac{t_1^{\nu_1} \ldots t_d^{\nu_d}}{\nu_1! \ldots \nu_d!} D_1^{\nu_1} \ldots D_d^{\nu_d} x_k,$$

$$k = 0, 1, \ldots, n. \tag{43'}$$

Diese Formel kann analog zu (29) für beliebige holomorphe Funktionen $F(X)$ verallgemeinert werden:

$$F(X) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{\nu_d=0}^{\infty} \frac{t_1^{\nu_1} \ldots t_d^{\nu_d}}{\nu_1! \ldots \nu_d!} D_1^{\nu_1} \ldots D_d^{\nu_d} F(x). \tag{43''}$$

Differenzieren wir hier nach t_j, so ändert sich unter der Summe (43'') nur der Exponent von D_j, der $\nu_j + 1$ statt ν_j wird, was wir auch dadurch berücksichtigen können, daß wir in (43'') rechts $F(x)$ durch $D_j F(x)$ ersetzen; dann folgt aber wieder durch Anwendung von (43'') auf $D_j F(x)$ statt $F(x)$:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial t_j} = [D_j F(x)]_{x_k \to X_k} = D_j^* F(X), \qquad j = 1, \ldots, d, \tag{44}$$

wenn wir wieder mit D_j^* den in den Variablen X_k geschriebenen Operator

[14] In der Tat unterscheiden sich die zum Operator $t_0 D_0 + t_1 D_1 + \ldots + t_d D_d$ gehörigen Lösungen X_k nur um den gemeinsamen Proportionalitätsfaktor e^{t_0} von den zu $t_1 D_1 + \ldots + t_d D_d$ gehörigen Lösungen.

D_j verstehen. Insbesondere, für $F(X) = X_k$, gelten also die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial X_k}{\partial t_j} = \vartheta_{jk}(X), \qquad \begin{matrix} j = 1, \ldots, d, \\ k = 0, \ldots, n. \end{matrix} \tag{45}$$

Diese Differentialgleichungen sind untereinander verträglich, denn man findet mit Rücksicht auf (41) für die gemischten zweiten Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 X_k}{\partial t_l \, \partial t_j} = \frac{\partial}{\partial t_l} \vartheta_{jk}(X) = \sum_{\nu=0}^{n} \vartheta_{l\nu}(X) \frac{\partial \vartheta_{jk}(X)}{\partial X_\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} \vartheta_{j\nu}(X) \frac{\partial \vartheta_{lk}(X)}{\partial X_\nu} =$$

$$= \frac{\partial^2 X_k}{\partial t_j \, \partial t_l} \qquad \begin{matrix} j, l = 1, \ldots, d, \\ k = 0, \ldots, n. \end{matrix}$$

Daher sind die Lösungen dieser Differentialgleichungen in der Umgebung eines jeden Punktes $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ der $AM(\mathfrak{p})$, in dem die Operatoren $D_1, \ldots, D_d$ stetig und linear unabhängig sind, *eindeutig* bestimmt als holomorphe Funktionen der d Parameter $t_1, \ldots, t_d$, und zwar sind das die Funktionen (43′); ihre Funktionalmatrix ist mit Rücksicht auf (45):

$$\frac{\partial(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_d)} = (\vartheta_{jk}(X)); \tag{46}$$

sie hat in allen oben bezeichneten Punkten, das ist fast überall auf der $AM(\mathfrak{p})$[15], den Rang d, so daß die Funktionen (43′) in den Umgebungen dieser Punkte nur die vom Primideal $\mathfrak{p}$ vorgeschriebenen algebraischen Relationen erfüllen[16] und infolgedessen *mit ihrem Wertevorrat die gesamten d-dimensionalen Umgebungen darstellen.*

Auch hier schließen wir aus der Eindeutigkeit der Lösungen (43′) wieder auf ihre *analytische Fortsetzbarkeit längs jedes beliebigen Weges auf der* $AM(\mathfrak{p})$, der nur keine Ausnahmspunkte berühren darf; es gilt nämlich die der Formel (25) entsprechende Relation:

$$\varphi_k(x_0, \ldots, x_n; t_1' + t_1, \ldots, t_d' + t_d) = \varphi_k(x_0', \ldots, x_n'; t_1, \ldots, t_d) \tag{47}$$

---

[15] Ausnahmspunkte, in denen irgendeine Form $\vartheta_{jk}(x)$ unendlich wird oder die aus ihnen gebildete Matrix einen Rang $< d$ aufweist, haben eine (komplexe) Dimension $< d$ und können daher den Zusammenhang der algebraischen Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$ nicht zertrennen; d. h. man kann immer einen Weg von einem Punkt zu einem beliebigen andern Punkt auf der Mannigfaltigkeit angeben, der keinen Ausnahmspunkt berührt. Ferner sind alle Ausnahmspunkte Häufungspunkte von regulären Punkten der $AM(\mathfrak{p})$.

[16] Daß sie diese erfüllen, folgt aus (43″) genau so wie im eingliedrigen Fall aus (29).

mit

$$x_k' = \varphi_k(x_0, \ldots, x_n; t_1', \ldots, t_d'), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Innerhalb des gemeinsamen Konvergenzbereiches der zugehörigen Reihendarstellungen sind dies Identitäten, außerhalb derselben sind durch (47) die analytischen Fortsetzungen der Funktionen (43′) definiert.

Wir können das Ergebnis nun in der folgenden Weise zusammenfassen:

Auf jeder irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$ der Dimension d, die als Nullstellengebilde eines homogenen Primideals $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{k} = K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper K der Charakteristik 0 gegeben ist, kann ein Liescher Ring

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{k}^*[D_0, D_1, \ldots, D_d]$$

aller zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Differentialoperatoren definiert werden. Insbesondere können die Basisoperatoren D_i so gewählt werden, daß sie untereinander vertauschbar sind. Den Differentialoperatoren D_i entspricht ein System von Differentialgleichungen (45), *die untereinander verträglich sind und in der Umgebung eines jeden „regulären"*[17] *Punktes ein eindeutig bestimmtes System von Lösungsfunktionen* (43′) *besitzen, die holomorphe Funktionen von d unabhängigen Parametern $t_1, \ldots, t_d$ sind und die Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$ in dieser Umgebung lückenlos und umkehrbar eindeutig darstellen. Diese Funktionen sind über die gesamte Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$ — mit Ausschluß der Ausnahmspunkte — unbeschränkt analytisch fortsetzbar.*

Durch passendes Zerschneiden der Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$ kann man erreichen, daß diese Funktionen eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung dieser Mannigfaltigkeit — mit Ausschluß der Ausnahmspunkte — auf einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ des Parameterraumes vermitteln.

Jedem Punkt $\{t_1, \ldots, t_d\}$ von $\mathfrak{F}$ entspricht eine analytische[18] *Transformation $U(t_1, \ldots, t_d)$ der algebraischen Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$ in sich, die durch die Gleichungen* (43′) *gegeben ist, welche bei festgehaltenen Parameterwerten $\{t_1, \ldots, t_d\}$ jeden regulären Punkt mit den Koordinaten*

---

[17] „Reguläre" Punkte hinsichtlich der Differentialoperatoren D_i sind alle Punkte der Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$, in denen diese Operatoren stetig und linear unabhängig (über $\mathfrak{k}^*$) sind. Die Ausnahmspunkte, die nicht „regulär" sind, haben höchstens die (komplexe) Dimension d—1 und können daher die d-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p})$ nicht zertrennen; jeder Ausnahmspunkt ist Häufungspunkt von regulären Punkten.

[18] In Ausnahmsfällen können diese Transformationen birational sein.

$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *der* $AM(\mathfrak{v})$ *in einen andern regulären Punkt* $\{X_0, X_1, \ldots$ $\ldots, X_n\}$ *überführen.*

Diese Transformationen bilden in ihrer Gesamtheit eine **d-gliedrige kontinuierliche Abelsche Gruppe,** *da die Zusammensetzung von zwei Transformationen zufolge* (47) *lautet:*

$$U(t_1, \ldots, t_d)\, U(t_1', \ldots, t_d') = U(t_1', \ldots, t_d')\, U(t_1, \ldots, t_d) = \\ = U(t_1 + t_1', \ldots, t_d + t_d'). \qquad (48)$$

Diese Gruppe ist in bezug auf die regulären Punkte transitiv, d. h. jeder reguläre Punkt wird durch eine passende Transformation der Gruppe in einen beliebig vorgegebenen regulären Punkt übergeführt. Die identische Transformation ist $U(0, \ldots, 0)$, *die inverse zu* $U(t_1, \ldots, t_d)$ *ist* $U(-t_1, \ldots$ $\ldots, -t_d)$.

Innsbruck, den 22. Dezember 1956.

Zusatz bei der Korrektur: Das ist im Sinne von *S. Lie* zu verstehen, d. h. bei Beschränkung auf passende Ausschnitte aus der algebraischen Mannigfaltigkeit einerseits, aus dem Parameterraum andererseits. Wie schon bemerkt wurde, sind die analytischen Fortsetzungen der Funktionen (24) bezw. (43′) auf der $AM(\mathfrak{p})$ nicht unabhängig vom Weg; diese Funktionen sind im allgemeinen bei beliebiger Fortsetzung im Parameterraum nicht eindeutig, sondern besitzen Verzweigungsstellen (Verzweigungsmannigfaltigkeiten), bei deren Umlaufung sie ihre Werte ändern; sie hängen wesentlich von den Nennern der ϑ_{ik} ab, können also durch passende Auswahl der Basisoperatoren weitgehend verändert werden.

Übrigens können die obigen Ableitungen noch auf viele Arten variiert werden. Insbesondere sind durch die Reihen (43) auch ohne die Voraussetzung (40) holomorphe Funktionen der Parameter t definiert, welche die $AM(\mathfrak{p})$ aufspannen und zu ihrer Parametrisierung verwendet werden können,

Die Eigenschaft, eine absolut transitive d-gliedrige kontinuierliche Abelsche Gruppe von birationalen Transformationen in sich zu besitzen, ist bekanntlich charakteristisch für Picardsche Mannigfaltigkeiten, vgl. *Conforto*, Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, Springer 1956, S. 177 ff.

Über koaxiale euklidische Schraubungen

Von

R. Bereis und **H. Brauner**, Wien

Mit 7 Textabbildungen

(Eingegangen am 8. Januar 1957)

Die ∞^3 Bahnkurven s der ∞^1 *koaxialen euklidischen Schraubungen* $\mathfrak{S}(p)$ um die z-Achse eines kartesischen Normalkoordinatensystems $(O; x, y, z)$ besitzen mittels eines Parameters φ die Darstellung

$$x = r\cos(\varphi + \varphi_0),\ y = r\sin(\varphi + \varphi_0),\ z = p\,\varphi. \tag{1}$$

r legt dabei den Schraubzylinder Φ fest, auf dem die betreffende Schraublinie s verläuft und φ_0 die Lage von s auf Φ; p ist der „Parameter" der Schraubung $\mathfrak{S}$. Fassen wir die Koordinaten x, y des Grundrisses S' eines Punktes S der Schraublinie s zur komplexen Zahl $S' = x + iy$ zusammen, so wird aus den Gleichungen (1)

$$S' = r\,e^{i(\varphi+\varphi_0)},\ z = p\,\varphi. \tag{2}$$

Die ∞^3 Schraubtorsen Σ der Schraubungen $\mathfrak{S}(p)$ lauten in inhomogenen Ebenenkoordinaten (u, v, w):

$$u = -\sin(\varphi + \varphi_0) : r\,\varphi,\ v = \cos(\varphi + \varphi_0) : r\,\varphi,\ w = -1 : p\,\varphi. \tag{3}$$

Die Zusammenfassung der Geradenkoordinaten u, v der Spur σ_1 der Ebene σ liefert die komplexe Zahl $\sigma_1 = u + iv$. Deutet man u, v als Punktkoordinaten, so bestimmt $u + iv$ den Antipol der Spur σ_1 bezüglich des Einheitskreises um O. Aus den Gleichungen (3) wird dann

$$\sigma_1 = i\,e^{i(\varphi+\varphi_0)} : r\,\varphi,\ w = -1 : p\,\varphi. \tag{4}$$

Wir betrachten i. f. *solche involutorische Korrelationen* — also lineare Nullsysteme oder Polarsysteme —, *die die Gesamtheit der koaxialen Schraublinien* (2) *mit der Gesamtheit der koaxialen Schraubtorsen* Σ (4) *vertauschen*. Diese Frage wurde für koaxiale projektive Schraubungen in analytischer Form von den Verfassern an anderer Stelle untersucht [1], wobei der geometrisch besonders interessante Grenzfall der euklidischen Schraubung nur gestreift wurde. Zweck dieser Note ist es, auf

direktem, konstruktiven Weg diese Korrelationen aufzusuchen; außerdem werden gewisse im Tangentenkomplex einer Schraubung enthaltene Kurven und Kongruenzen betrachtet.

§ 1. Die automorphen linearen Nullsysteme koaxialer Schraubungen

Ist $\mathfrak{N}$ ein lineares Nullsystem, das eine Schraubung $\mathfrak{S}$ in eine koaxiale Schraubung $\mathfrak{S}^*$ überführt, so muß $\mathfrak{N}$ Schiebungen längs der Schraubachse und Drehungen um diese zulassen; die Schraubachse ist daher die Achse des Nullsystems $\mathfrak{N}$. Die Nullstrahlen eines solchen Nullsystems erfüllen das Normalengewinde einer dieser koaxialen Schraubungen. $\mathfrak{N}$ ordnet jedem Punkt P eine mit ihm inzidente Ebene π^* zu, deren Böschung nur vom Abstand des Punktes P von der Schraubachse abhängt. Zerlegt man die Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ in eine gleichförmige Drehung um die Schraubachse und eine gleichförmige Schiebung längs dieser, so wird bei Anwendung des linearen Nullsystems $\mathfrak{N}_1(p_1)$ der Schraubung $\mathfrak{S}_1(p_1)$ die Drehung in eine gleichsinnige Drehung der gleichen Winkelgeschwindigkeit und die Schiebung in eine gleichsinnige mit der gleichen Schiebgeschwindigkeit übergeführt. Die Anwendung des linearen Nullsystems $\mathfrak{N}_1(p_1)$ führt somit aus der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ nicht heraus.

Satz 1: *Die einzigen linearen Nullsysteme, die die Gesamtheit koaxialer Schraubungen festlassen, sind die Nullsysteme der ∞^1 Normalengewinde dieser Schraubungen. Jedes dieser Nullsysteme führt jede einzelne dieser koaxialen Schraubungen in sich über.*

Das lineare Nullsystem $\mathfrak{N}_1(p_1)$ der Schraubung $\mathfrak{S}_1(p_1)$ ordnet jedem Punkt $P(x_1, y_1, z_1)$ als Nullebene $\pi^*(u^*, v^*, w^*)$ die Ebene

$$u^* = y_1 : p_1 z_1,\ v^* = -x_1 : p_1 z_1,\ w^* = -1 : z_1 \qquad (5)$$

zu. Verwendet man den Endpunkt $R(0, 0, p)$ der Parameterstrecke p jener Schraubung $\mathfrak{S}(p)$, die dem Nullsystem $\mathfrak{N}_1(p_1)$ unterworfen wird, als Auge einer Zentralprojektion auf die xy-Ebene (Abb. 1), so ist die Drehflucht[1] $\hat{\pi}^*$ der Nullebene π^* von P nach (5) die Gerade $x_1\, x + y_1\, y + pp_1 = 0$, oder in komplexer Gestalt

[1] Nach *Th. Schmid* [2] versteht man unter der *Drehflucht* einer Geraden den um O durch $\pi/2$ im Sinne der Schraubung verschwenkten Fluchtpunkt der Geraden. Eine analoge Erklärung gilt für die Drehflucht einer Ebene. I. f. werden die beiden Sätze über Drehfluchten benötigt: 1. *Die Drehflucht einer Schraubtangente ist der Grundriß ihres Gratpunktes.* 2. *Die Drehflucht einer Ebene ist der Grundriß ihrer Grattangente.*

$$\hat{\pi}^* = P' : pp_1. \tag{6}$$

Diese Gerade ist die Polare des Grundrisses P' von P bezüglich des Kreises $j(O; \sqrt{-pp_1})$ (in Abb. 1 wurde $pp_1 > 0$ angenommen; die Polarität am nullteiligen Kreis j ist dann die Antipolarität an seinem reellen Vertreter j^r). Der Schnittpunkt von π^* mit der z-Achse besitzt die Höhenkote z_1.

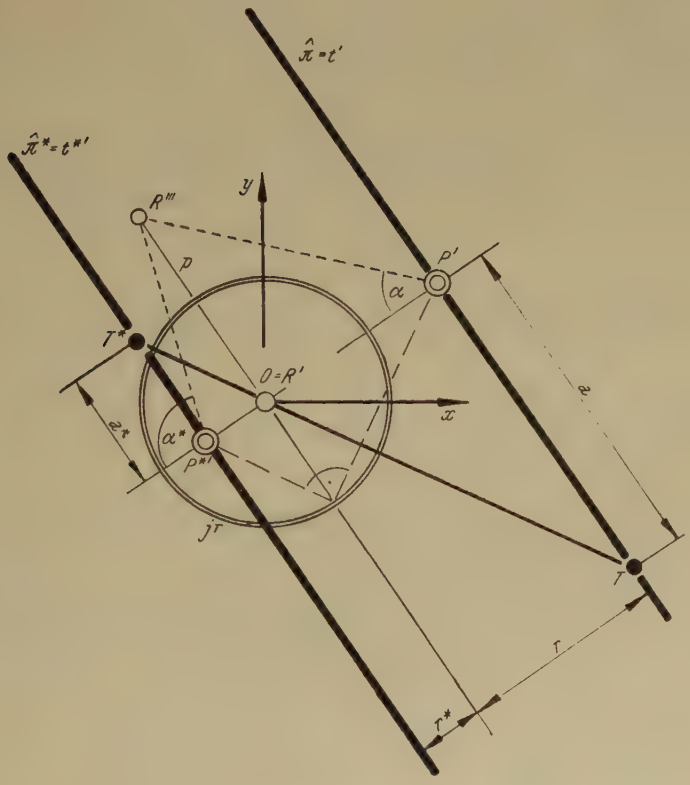

Abb. 1. Das Nullsystem einer koaxialen Schraubung

Der Gratpunkt P^* von π^* in der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ liegt auf demselben Normalstrahl zur Schraubachse wie der Punkt P, sein Grundriß $P^{*\prime}$ ist zu P' bezüglich j invers. Die Transformation $\mathfrak{N}$ zwischen P und P^*, die durch Zusammensetzung des linearen Nullsystems $\mathfrak{N}_1(p_1)$ mit jenem kubischen Nullsystem $\mathfrak{M}(p)$ entsteht, das jeder Ebene ihren Gratpunkt und jedem Punkt seine Bahnschmiegebene in der Schraubung

$\mathfrak{S}(p)$ zuweist, ist demnach die „*axiale Inversion*" [3], [4] am Drehzylinder

$$x^2 + y^2 + pp_1 = 0; \tag{7}$$

ihre Gleichungen lauten (wenn die konjugiert komplexe Zahl durch Überstreichen gekennzeichnet wird):

$$P^{*\prime}\,\bar{P}' = -\,pp_1,\ z^* = z. \tag{8}$$

Die durch das Produkt des linearen Nullsystem $\mathfrak{N}_1$ mit dem kubischen Nullsystem $\mathfrak{M}$ im Ebenenraum entstehende kubische Ebenenverwandtschaft $\mathfrak{E}$ ordnet der Bahnschmiegebene π^* von P^* die Bahnschmiegebene π von P zu. Ist r bzw. r^* der gerichtete Abstand des Punktes P bzw. P^* von der Schraubachse, so gilt für die Neigungswinkel α bzw. α^* entsprechender Ebenen π bzw. π^* gegen die Horizontalstellung (wie man aus dem Seitenriß in Abb. 1 erkennt) $\operatorname{tg}\alpha = p : r$ bzw. $\operatorname{tg}\alpha^* = p : r^*$ und somit unter Verwendung von (8)

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha^* = -\,p : p_1. \tag{9}$$

$\mathfrak{E}$ ist eine „*axiale Ebeneninversion*" [4], [5]; entsprechende Ebenen enthalten dabei denselben Normalstrahl zur Schraubachse, für ihre Böschungen gilt (9). $\sqrt{-p : p_1}$ heißt *Konstante* der Inversion. Die Transformationsgleichungen von $\mathfrak{E}$ lauten:

$$\pi_1\,\bar{\pi}_1{}^* = -\,pw^{*2} : p_1,\ w = w^*. \tag{10}$$

Das Nullsystem $\mathfrak{N}_1$ führt die Schraubtangente t von P in der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ über in die Schraubtangente t^* von P^*. Der Grundriß t' bzw. $t^{*\prime}$ von t bzw. t^* fällt mit der Drehflucht $\hat{\pi}$ bzw. $\hat{\pi}^*$ zusammen. t besitzt als Fallgerade der Ebene π gegen die Horizontalstellung ebenfalls den Neigungswinkel α; ist T der Spurpunkt von t in der xy-Ebene, z die Höhenkote von P und setzt man $TP' = a$, so gilt $z : a = p : r$ und entsprechend für die Tangente t^* (mit $T^*P' = a^*$) $z : a^* = p : r^*$ (Abb. 1). Daraus ergibt sich

$$r : a = r^* : a^*. \tag{11}$$

Die Spurpunkte der Bahntangenten eines Normalstrahles der Schraubachse liegen also auf einer die Schraubachse normal schneidenden Geraden. Diese Gerade ist übrigens Erzeugende des von den Schraubtangenten der Punkte dieses Normalstrahles erfüllten Paraboloids.

Satz 2: *Im linearen Nullsystem $\mathfrak{N}_1(p_1)$ entsprechende Schraubtangenten t und t^* besitzen parallele, zum Kreis $(O; \sqrt{-pp_1})$ konjugierte Grundrisse; ihre Spurpunkte T und T^* liegen auf einer Geraden durch O.*

Die Zusammensetzung von $\mathfrak{N}_1(p_1)$ mit dem kubischen Nullsystem $\mathfrak{M}(p)$ liefert im Punktraum die Müllersche axiale Inversion am Drehzylinder $(z; \sqrt{-pp_1})$, im Ebenenraum die Eckhartsche axiale Ebeneninversion mit der Konstanten $\sqrt{-p : p_1}$.

§ 2. Die automorphen Polarsysteme koaxialer Schraubungen

Ist Ψ eine Fläche 2. Grades, deren Polarsystem $\mathfrak{P}$ eine Schraubung $\mathfrak{S}$ in die koaxiale Schraubung $\mathfrak{S}^*$ überführt, so müssen die Schraubachse z und die Ferngerade $|z$ der Horizontalstellung entweder einzeln festbleiben oder vertauscht werden, d. h. z und $|z$ sind entweder Erzeugenden oder ein Paar reziproker Polaren von Ψ. Das Polarsystem $\mathfrak{P}$ muß z-parallele Schiebungen zulassen. Die reziproke Polare g^* einer z-parallelen Geraden g ist daher eine Ferngerade, dem Bündel der Geraden g durch den Fernpunkt Z_u der z-Achse entspricht das Feld der Ferngeraden g^*. Da der Punkt Z_u mit seiner Polarebene inzidiert, liegt er auf Ψ; Ψ berührt in Z_u die Fernebene, ist daher ein *Paraboloid*. Die Gerade z (und damit die Gerade $|z$) kann also keine Erzeugende von Ψ sein.

z und $|z$ sind somit reziproke Polaren von Ψ. Das Polarsystem $\mathfrak{P}$ des Paraboloids Ψ muß auch Drehungen um die Schraubachse gestatten, d. h. die Polarebenen der Punkte eines Kreises c mit der z-Achse als Drehachse müssen einen Drehkegel Γ um die z-Achse umhüllen. Die absoluten Punkte von c werden dabei im Polarsystem $\mathfrak{P}$ mit den Minimaltangentialebenen an Γ durch die Schraubachse vertauscht; die Ferngeraden von Ψ sind also entweder selbst Minimalgeraden durch Z_u oder liegen zu diesen harmonisch. Im ersten Fall ist die Quadrik ein *Drehparaboloid* Ψ_1, im zweiten Fall ein *gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid* Ψ_1 mit der Schraubachse als Achse.

Satz 3: *Die einzigen Flächen 2. Grades, deren Polarsysteme die Gesamtheit koaxialer Schraubungen festlassen, sind die ∞^2 Drehparaboloide Ψ_1 um die Schraubachse und die ∞^3 gleichseitigen hyperbolischen Paraboloide Ψ_2 mit der Schraubachse als Achse.*

Wir untersuchen zunächst den Fall eines *Drehparaboloids* Ψ_1. Setzt man dieses — was o. B. d. A. geschehen kann — in der Gestalt

$$x^2 + y^2 - 2ez = 0 \tag{12}$$

an und verwendet man den Endpunkt $R(0, 0, p)$ der Parameterstrecke p jener Schraubung $\mathfrak{S}(p)$, die dem Polarsystem $\mathfrak{P}_1$ von Ψ_1 unterworfen

wird, als Auge einer Zentralprojektion auf die xy-Ebene (Abb. 2), so ist die Fluchtspur π_u^* der Polarebene π^* eines Punktes $P(x_1, y_1, z_1)$ nach (12) die Gerade $x_1 x + y_1 y + ep = 0$, oder in komplexer Gestalt:

$$\pi_u^* = P' : ep. \tag{13}$$

Diese Gerade ist die Polare des Grundrisses P' bezüglich des Kreises $j_1(O; \sqrt{-ep})$ (in Abb. 2 wegen $ep > 0$ die Antipolare bezüglich des

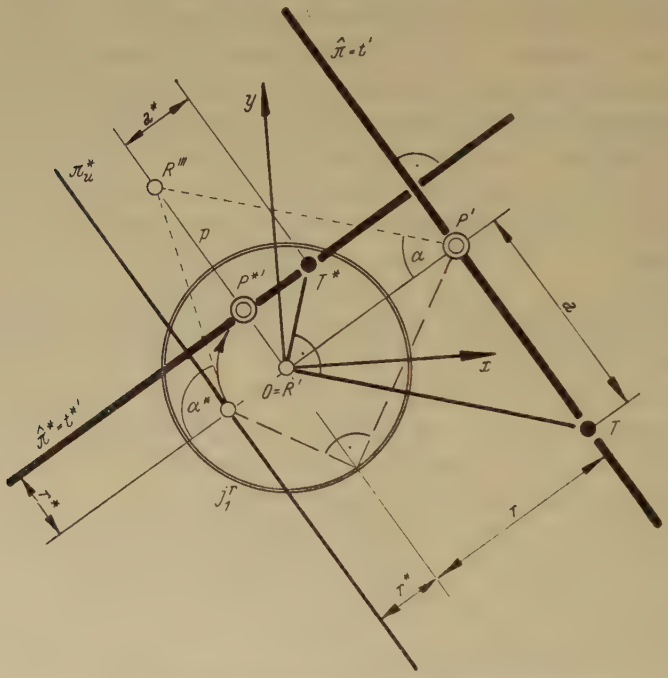

Abb. 2. Das Polarsystem eines koaxialen Drehparaboloids

reellen Vertreters j_1^r von j_1). Der Schnittpunkt von π^* mit der z-Achse besitzt die Höhenkote $-z_1$. Im Polarsystem $\mathfrak{P}_1$ von Ψ_1 wird daher eine gleichförmige z-parallele Schiebung in eine entgegengesetzt gleiche Schiebung transformiert. Da Ψ_1 eine Drehfläche ist, geht ferner eine gleichförmige Drehung um die Schraubachse in eine gleichsinnig gleichförmige Drehung über. $\mathfrak{P}_1$ führt somit die Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ in die „*gegengewundene*" koaxiale Schraubung $\mathfrak{S}^*(-p)$ über.

Der Gratpunkt P^* von π^* in der neuen Schraubung $\mathfrak{S}^*(-p)$ liegt auf der die z-Achse schneidenden Schichtengeraden von π^*, sein Grundriß

$P^{*\prime}$ liegt auf der Drehflucht $\hat{\pi}^*$ von π^*, geht also aus dem zu P' bezüglich j_1 inversen Punkt durch eine Viertelschwenkung im Sinne der Schraubung $\mathfrak{S}^*(-p)$ um O hervor. Das Produkt des Polarsystems $\mathfrak{P}_1$ mit dem kubischen Nullsystem $\mathfrak{M}^*(-p)$ von $\mathfrak{S}^*(-p)$ ist eine kubische Punktverwandtschaft $\mathfrak{K}_1$, die aus der Spiegelung an der Scheiteltangentialebene von Ψ_1, Viertelschwenkung um die Schraubachse im Sinne der Schraubung $\mathfrak{S}^*(-p)$ und nachfolgender axialer Inversion am Drehzylinder $(z; \sqrt{-ep})$ besteht. Die Gleichungen von $\mathfrak{K}_1$ lauten:

$$P^{*\prime}\,\overline{P}' = epi,\quad z^* = -z. \tag{14}$$

Die durch das Produkt des Polarsystems $\mathfrak{P}_1$ mit dem kubischen Nullsystem $\mathfrak{M}^*(-p)$ im Ebenenraum entstehende kubische Ebenenverwandtschaft $\mathfrak{E}_1$ ordnet der Bahnschmiegebene π^* von P^* in $\mathfrak{S}^*(-p)$ die Bahnschmiegebene π von P in $\mathfrak{S}(p)$ zu. Ist r bzw. r^* der gerichtete Abstand von P bzw. P^* von der Schraubachse, so erhält man aus dem Seitenriß in Abb. 2 für die Neigungswinkel α bzw. α^* entsprechender Ebenen π bzw. π^* gegen die Horizontalstellung $\operatorname{tg}\alpha = p : r$ bzw. $\operatorname{tg}\alpha^* = p : r^*$ und unter Verwendung von (14)

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha^* = p : e. \tag{15}$$

$\mathfrak{E}_1$ setzt sich somit aus der Spiegelung an der Scheiteltangentialebene von Ψ_1, Viertelschwenkung um O im Sinne der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ und nachfolgender axialer Ebeneninversion zusammen, deren Konstante jedoch $\sqrt{-p : e}$ ist, da sich das Vorzeichen des Winkels α bei der Spiegelung an der Scheiteltangentialebene umkehrt. In Ebenenkoordinaten lautet diese Transformation $\mathfrak{E}_1$:

$$\pi_1\,\bar{\pi}_1^* = -p\,i\,w^{*2} : e,\quad w = -w^*. \tag{16}$$

Das Polarsystem $\mathfrak{P}_1$ führt die Schraubtangente t von P der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ über in die Schraubtangente t^* von P^* in der Schraubung $\mathfrak{S}^*(-p)$. Die Grundrisse t', $t^{*\prime}$ gehen durch die Punkte P' bzw. $P^{*\prime}$ und stehen aufeinander normal. Der Spurpunkt T^* von t^* liegt mit dem aus dem Spurpunkt T von t durch Viertelschwenkung im Sinne der Schraubung $\mathfrak{S}^*(-p)$ entstandenen Punkt auf einer Geraden durch O, T und T^* liegen also auf einem Rechtwinkelhaken durch O.

Satz 4: *Die Polarsysteme $\mathfrak{P}_1$ der Drehparaboloide um die Schraubachse ordnen jeder Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ die gegengewundene koaxiale Schraubung $\mathfrak{S}^*(-p)$ zu. Die Zusammensetzung von $\mathfrak{P}_1$ mit dem kubischen Nullsystem $\mathfrak{M}^*(-p)$ liefert bis auf eine gegensinnig kongruente Transformation*

im Punktraum die Müllersche axiale Inversion am Drehzylinder $(z; \sqrt{-ep})$, *im Ebenenraum die Eckhartsche axiale Ebeneninversion mit der Konstanten* $\sqrt{-p} : e$.

Nach Satz 3 sind nun noch die *gleichseitigen hyperbolischen Paraboloide* Ψ_2 zu untersuchen. Die Gleichung von Ψ_2 lautet o. B. d. A.

$$x\,y - e\,z = 0. \tag{17}$$

Verwendet man dieselbe Zentralprojektion auf die xy-Ebene wie im Falle der Flächen Ψ_1 (Abb. 3), so ist die Drehflucht $\hat{\pi}^*$ in der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ der Polarebene π^* eines Punktes $P(x_1, y_1, z_1)$ nach (17) die Gerade $x_1 x - y_1 y - ep = 0$, oder in komplexer Gestalt:

$$\hat{\pi}^* = -\overline{P'} : ep. \tag{18}$$

Die Gerade $\hat{\pi}^*$ ist bezüglich des Kreises $j_2(O; \sqrt{-ep})$ die Polare des an der y-Achse gespiegelten Grundrißpunktes P' (in Abb. 3 wegen

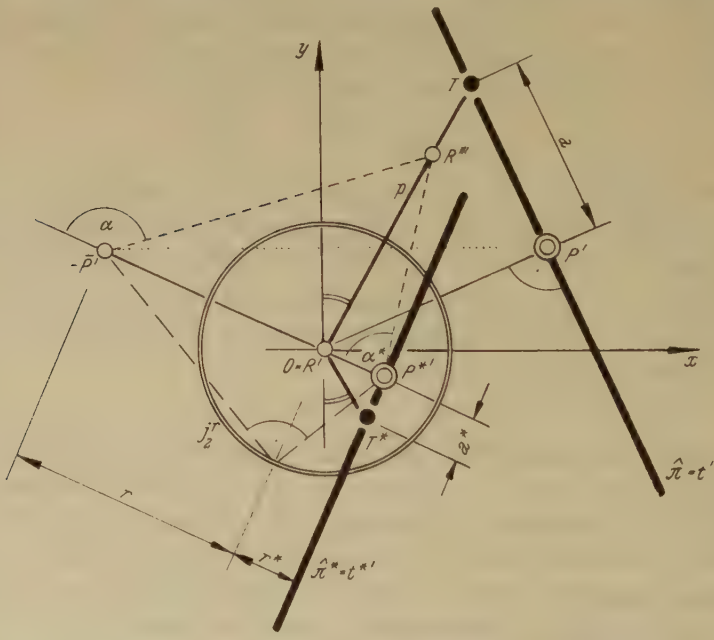

Abb. 3.
Das Polarsystem eines koaxialen gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids

$ep > 0$ die Antipolare bezüglich des reellen Vertreters j_2^r von j_2). Der Schnittpunkt von π^* mit der z-Achse hat die Höhenkote $-z_1$. Das Polarsystem $\mathfrak{P}_2$ von Ψ_2 führt daher eine gleichförmige z-parallele

Schiebung in eine entgegengesetzt gleiche Schiebung über. Nach (18) wird eine gleichförmige Drehung um die z-Achse in eine entgegengesetzt gleichförmige Drehung übergeführt; $\mathfrak{P}_2$ führt somit nicht aus der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ heraus.

Der Gratpunkt P^* von π^* in der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ liegt auf der die z-Achse schneidenden Schichtengeraden von π^*, sein Grundriß $P^{*\prime}$ liegt auf der Drehflucht $\hat{\pi}^*$ von π^*, geht also aus dem zu P' bezüglich der y-Achse symmetrischen Punkt $-\overline{P}'$ durch Inversion an j_2 hervor („*Stürzung*"). Das Produkt des Polarsystems $\mathfrak{P}_2$ mit dem kubischen Nullsystem $\mathfrak{M}(p)$ von $\mathfrak{S}(p)$ ist eine kubische Punktverwandtschaft $\mathfrak{K}_2$, die aus der Spiegelung an der y-Achse und nachfolgender axialer Inversion am Drehzylinder $(z; \sqrt{-ep})$ besteht. Ihre Gleichungen lauten:

$$P^{*\prime}\ P' = ep,\ z^* = -z. \tag{19}$$

Die durch das Produkt des Polarsystems $\mathfrak{P}_2$ mit dem kubischen Nullsystem $\mathfrak{M}(p)$ im Ebenenraum entstehende kubische Ebenenverwandtschaft $\mathfrak{E}_2$ ordnet der Bahnschmiegebene π^* von P^* die Bahnschmiegebene π von P in $\mathfrak{S}(p)$ zu. Entsprechende Ebenen gehen durch Spiegelung an der y-Achse und nachfolgender axialer Ebeneninversion hervor, bei der, wie sich aus dem Seitenriß in Abb. 3 und unter Verwendung von (19) ergibt, für die Neigungswinkel α, α^* entsprechender Ebenen gegen die Horizontalstellung gilt:

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha^* = p : e. \tag{20}$$

In Ebenenkoordinaten lautet diese Transformation $\mathfrak{E}_2$:

$$\pi_1\ \pi_1{}^* = p\ w^{*2} : e,\ w = -w^*. \tag{21}$$

Das Polarsystem $\mathfrak{P}_2$ führt die Schraubtangente t von P in der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ über in die Schraubtangente t^* von P^* in $\mathfrak{S}(p)$. Der Grundriß $t^{*\prime}$ fällt mit $\hat{\pi}^*$ zusammen, die Spurpunkte T und T^* liegen auf zur y-Achse symmetrischen Geraden durch O.

Satz 5: *Die Polarsysteme $\mathfrak{P}_2$ der gleichseitigen hyperbolischen Paraboloide mit der Schraubachse als Achse führen jede der koaxialen Schraubungen $\mathfrak{S}(p)$ einzeln in sich über. Die Zusammensetzung von $\mathfrak{P}_2$ mit dem kubischen Nullsystem $\mathfrak{M}(p)$ von $\mathfrak{S}(p)$ liefert bis auf eine gleichsinnig kongruente Transformation im Punktraum die Müllersche axiale Inversion am Drehzylinder $(z; \sqrt{-ep})$, im Ebenenraum die Eckhartsche axiale Ebeneninversion mit der Konstanten $\sqrt{p} : e$.*

§ 3. Schnittkongruenz eines Schraubtangentenkomplexes mit dem zu einem automorphen Nullsystem gehörigen Gewinde

Das lineare Nullsystem $\mathfrak{N}_1(p_1)$ (5) wird im Geradenraum durch

$$p_{01}^*:p_{02}^*:p_{03}^*:p_{23}^*:p_{31}^*:p_{12}^* = p_1p_{01}:p_1p_{02}:-p_{12}:p_1p_{23}:p_1p_{31}:-p_1^2p_{03} \tag{22}$$

beschrieben, wenn p_{ik} homogene *Plücker*koordinaten der Geraden sind. Durch Anwendung von $\mathfrak{N}_1$ geht die *Kongruenz* $K(p, p_1)$ der gemeinsamen Strahlen des quadratischen Tangentenkomplexes $\mathfrak{T}(p)$

$$p(p_{01}^2 + p_{02}^2) - p_{03}\,p_{12} = 0 \tag{23}$$

der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ und des zum Nullsystem $\mathfrak{N}_1$ gehörigen Gewindes

$$p_1\,p_{03} + p_{12} = 0 \tag{24}$$

als Ganzes in sich über. Die Kongruenzstrahlen durch einen Punkt P sind die Schnittgeraden der Nullebene π^* von P mit jenem quadratischen Kegel $\varkappa$, der von allen Schraubtangenten durch P gebildet wird. *K ist daher eine* (2, 2)*-Kongruenz.*

Der Komplexkegel $\varkappa$ ist bekanntlich ein orthogonaler Kegel mit horizontalen Kreisschnitten; er enthält die zur Schraubachse parallele

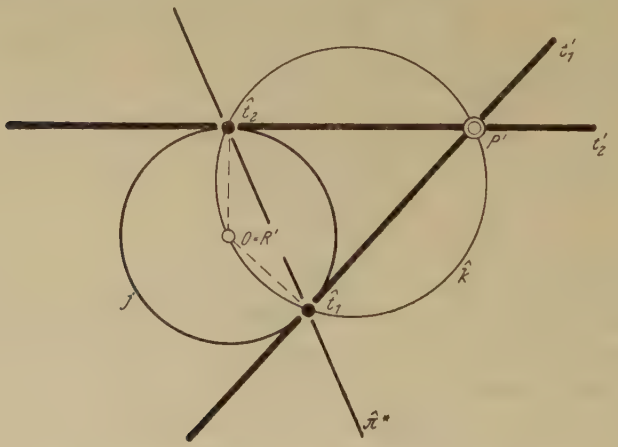

Abb. 4. Schraubtangenten in einem Normalengewinde

Gerade durch P und die Bahntangente von P als Scheitelerzeugenden. Bei Anwendung der Zentralprojektion aus $R(0, 0, p)$ auf die xy-Ebene ist die Drehflucht von $\varkappa$ daher der Kreis $\hat{k}$ über dem Durchmesser OP' (Abb. 4). Die Drehfluchtpunkte $\hat{t}_1$, $\hat{t}_2$ der durch P gehenden Kongruenz-

strahlen t_1, t_2 sind die Schnittpunkte der Drehflucht $\hat{\pi}^*$ mit $\hat{k}$; diese Drehflucht $\hat{\pi}^*$ ist nach (6) die Polare von P' bezüglich des Basiskreises j des Inversionszylinders (7) (in Abb. 4 wurde $pp_1 < 0$ gewählt). Der Kreis $\hat{k}$ ist daher zur Geraden $\hat{\pi}^*$ bezüglich j invers, d. h. $\hat{t}_1$, $\hat{t}_2$ sind auch die Schnittpunkte von $\hat{\pi}^*$ mit j. Die Grundrisse t_1', t_2' der Kongruenzstrahlen t_1, t_2 durch P sind demnach die Tangenten aus P' an j. Die Kongruenzstrahlen t_1, t_2 *berühren daher den Inversionszylinder* (7), die Kongruenz K ist also auch im quadratischen Tangentenkomplex

$$pp_1(p_{01}^2 + p_{02}^2) + p_{12}^2 = 0 \tag{25}$$

des Inversionszylinders enthalten. Der Gratpunkt jedes Strahles von K liegt dabei in seinem Berührpunkt mit dem Inversionszylinder, die Kongruenz $K(p, p_1)$ kann somit auch als *Gesamtheit der Schraubtangenten der Punkte des Inversionszylinders* erzeugt werden. Die Kongruenzstrahlen sind genau dann reell, wenn $pp_1 < 0$ ist. Der Inversionszylinder gehört zur *Brennfläche* der Kongruenz; außerdem treffen die Kongruenzstrahlen den Fernkreis

$$p_1(u^2 + v^2) + p\,w^2 = 0 \tag{26}$$

des Richtkegels aller Schraublinien der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ auf dem Inversionszylinder. Dieser Fernkreis entspricht dem Inversionszylinder im linearen Nullsystem $\mathfrak{N}_1(p_1)$. — Die *Schraublinien auf dem Inversionszylinder* (deren Tangenten die Kongruenz K erfüllen) sind die im Nullsystem $\mathfrak{N}_1(p_1)$ enthaltenen *Komplexkurven* aus $\mathfrak{T}(p)$.

§ 4. Schnittkongruenz eines Schraubtangentenkomplexes mit dem Tangentenkomplex eines koaxialen Drehparaboloids

Das Polarsystem $\mathfrak{P}_1(e)$ des Drehparaboloids $\Psi_1(e)$ (12) ordnet dem Punkt $P(x_1, y_1, z_1)$ als Polarebene $\pi^*(u^*, v^*, w^*)$ die Ebene

$$u^* = -x_1 : e\,z_1,\ v^* = -y_1 : e\,z_1,\ w^* = 1 : z_1 \tag{27}$$

zu. Im Geradenraum lautet das Polarsystem $\mathfrak{P}_1$

$$p_{01}^* : p_{02}^* : p_{03}^* : p_{23}^* : p_{31}^* : p_{12}^* = -ep_{02} : ep_{01} : -p_{12} : ep_{31} : -ep_{23} : e^2 p_{03}. \tag{28}$$

Durch Anwendung von $\mathfrak{P}_1$ geht die *Schnittkongruenz* $K_1(p, e)$ des Schraubtangentenkomplexes $\mathfrak{T}(p)$ (23) der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ mit dem Tangentenkomplex des Paraboloids Ψ_1

$$e(e\,p_{03}^2 + 2\,p_{01}\,p_{31} - 2\,p_{02}\,p_{23}) - p_{12}^2 = 0 \tag{29}$$

über in die Schnittkongruenz $K_1^*(-p, e)$ des Komplexes (29) mit dem Schraubtangentenkomplex $\mathfrak{T}^*(-p)$

$$p(p_{01}^2 + p_{02}^2) + p_{03}\, p_{12} = 0 \tag{30}$$

der Schraubung $\mathfrak{S}^*(-p)$. Die Strahlen der Kongruenz K_1 durch einen Punkt P sind die Schnittgeraden des quadratischen Tangentialkegels von P an Ψ_1 mit dem quadratischen Kegel $\varkappa$ der Schraubtangenten aus $\mathfrak{T}(p)$ durch P. *K_1 ist daher eine* (4,4)-*Kongruenz*; das Paraboloid Ψ_1 ist ein Bestandteil ihrer *Brennfläche*. Die ganze Brennfläche erhält man durch folgende Überlegung: Greift man aus der Kongruenz ∞^1 Flächen heraus, so besitzen diese Flächen die Brennfläche als Hüllgebilde[2]. Alle Kongruenzstrahlen, die durch die Punkte eines Breitenkreises b des Paraboloids Ψ_1 gehen, erfüllen je eine Strahlschar auf zwei koaxialen Drehhyperboloiden Ω_1, Ω_2, die Ψ_1 längs b berühren. Jede der in Frage kommenden Strahlscharen sämtlicher Hyperboloide Ω_1, Ω_2 gehen aus dem Drehnetz, das von den Schraubtangenten der Punkte eines horizontalen Feldes in der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ gebildet werden, durch gewisse z-parallele Schiebungen hervor; alle Flächen Ω_1, Ω_2 besitzen daher gleiche Nebenhalbachsenlängen ip. Das Hüllgebilde dieser Hyperboloide Ω_1, Ω_2 ist neben Ψ_1 noch eine gewisse *Drehfläche 7. Ordnung*, die Ψ_1 längs des Breitenkreises vom Radius $\sqrt{2\,ep}$ berührt; dieser Kreis ist — wie unten gezeigt wird — der Ort der Spitzen der auf Ψ_1 liegenden Kurven aus dem Tangentenkomplex $\mathfrak{T}(r)$. Die Meridiankurve dieser Fläche 7. Ordnung ist der Rest des Hüllgebildes aller Hyperbeln, die die Meridianparabel von Ψ_1 in zur Schraubachse symmetrischen Punkten berühren und die gleiche Nebenhalbachsenlänge ip besitzen. Diese zur Schraubachse symmetrische Kurve hat die Schraubachse zur Asymptote und berührt die Meridianparabel doppelt.

Das Polarsystem $\mathfrak{P}_1$ führt die Kongruenz $K_1(p, e)$ über in die Kongruenz $K_1^*(-p, e)$, die aus K_1 durch Spiegelung an einer Ebene durch die Schraubachse entsteht. Die auf Ω_1 liegende Strahlschar aus K_1 geht durch $\mathfrak{P}_1$ über in eine Strahlschar aus K_1^*, die auf dem zum gleichen Breitenkreis b wie Ω_1 gehörigen Hyperboloid Ω_2 liegt. Diese Strahlschar auf Ω_2 geht durch Spiegelung an einer Ebene durch die Schraubachse über in die auf Ω_2 liegende Strahlschar aus K_1. Das Polarsystem $\mathfrak{P}_1$ ordnet also je zwei dem Paraboloid Ψ_1 längs eines Breitenkreises berührend umschriebene Drehhyperboloide Ω_1, Ω_2 mit gleicher Neben-

[2] Diesen Gedanken verdanken wir einer mündlichen Mitteilung von *W. Wunderlich*, der ihn selbst in der Arbeit [6] verwendet.

achsenlänge $2\,ip$ einander zu, wobei insbesondere für den oben erwähnten Spitzenkreis Ω_1 mit Ω_2 zusammenfällt. Das Hüllgebilde aller dieser Hyperboloide Ω_1, Ω_2, die Brennfläche von K_1, ist im Polarsystem $\mathfrak{P}_1$ *autopolar*.

Jeder Strahl der Kongruenz $K_1(p, e)$ ist Bahntangente eines Punktes in der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$, alle diese Gratpunkte erfüllen eine gewisse Fläche Φ_1. Die Bahntangente t des Punktes $P(x_1, y_1, z_1)$ besitzt nach (1) die Parameterdarstellung

$$X = x_1 - \lambda\, y_1,\ Y = y_1 + \lambda\, x_1,\ Z = z_1 + \lambda\, p \tag{31}$$

und gehört der Kongruenz K_1 an, wenn sie Ψ_1 berührt. Das liefert als Ort der Punkte P die Fläche Φ_1

$$(x^2 + y^2)^2 - 2\,e\,z(x^2 + y^2) - e^2\,p^2 = 0. \tag{32}$$

Diese „*Gratpunktfläche*" Φ_1 ist eine *Drehfläche 4. Ordnung*, deren Meridian die rationale Quartik

$$x^4 - 2\,e\,x^2\,z - e^2\,p^2 = 0 \tag{33}$$

ist. Sie besitzt im Fernpunkt Z_u der Schraubachse einen dreifachen Punkt, und zwar eine Spitze mit der z-Achse als Spitzentangente und einen die Ferngerade in Z_u berührenden einfachen Zweig; die Kurve ist daher von 5. Klasse. Die Parabel $x^2 - 2\,ez = 0$ ist asymptotische Kurve, sie berührt die Quartik (33) in Z_u sechspunktig.

Faßt man in *dualer Weise* jeden Strahl der Kongruenz $K_1(p, e)$ als Grattangente einer Ebene auf, so erfüllen diese Ebenen die zu Φ_1 (32) bezüglich Ψ_1 (12) polare Fläche $\Phi_1{}^*$:

$$e^2(u^2 + v^2)^2 - 2\,e\,w(u^2 + v^2) - p^2\,w^4 = 0. \tag{34}$$

Diese *Drehfläche 4. Klasse* besitzt als Meridian die rationale Kurve 4. Klasse 5. Ordnung

$$e^2\,u^4 - 2\,e\,u^2\,w - p^2\,w^4 = 0, \tag{35}$$

die zur Kurve (33) bezüglich der Meridianparabel von Ψ_1 polar ist.

Auf dem Paraboloid Ψ_1 liegen *Komplexkurven* des Schraubtangentenkomplexes $\mathfrak{T}(p)$, deren Tangenten ebenfalls die Kongruenz K_1 erfüllen. Durch jeden Punkt P von Ψ_1 gehen zwei solche Flächentangenten, welche die Schnittgeraden der Tangentialebene π^* in P an Ψ_1 mit dem zu P gehörigen Schraubtangentenkegel $\varkappa$ sind. Bei Verwendung der oben erklärten Zentralprojektion aus $R(0, 0, p)$ auf die xy-Ebene besitzt der Drehfluchtkreis $\hat{k}$ dieses Kegels $\varkappa$ die Strecke OP' als Durchmesser

(Abb. 5). Da die Schnittpunkte von $\hat{k}$ mit der Drehflucht $\hat{\pi}^*$ der Tangentialebene π^* die Drehfluchtpunkte $\hat{t}_1$, $\hat{t}_2$ der Kongruenzstrahlen t_1, t_2 durch den Flächenpunkt P sind, ergeben die Verbindungsgeraden von P' mit $\hat{t}_1$ bzw. $\hat{t}_2$ die Richtungen der Grundrisse der Linienelemente

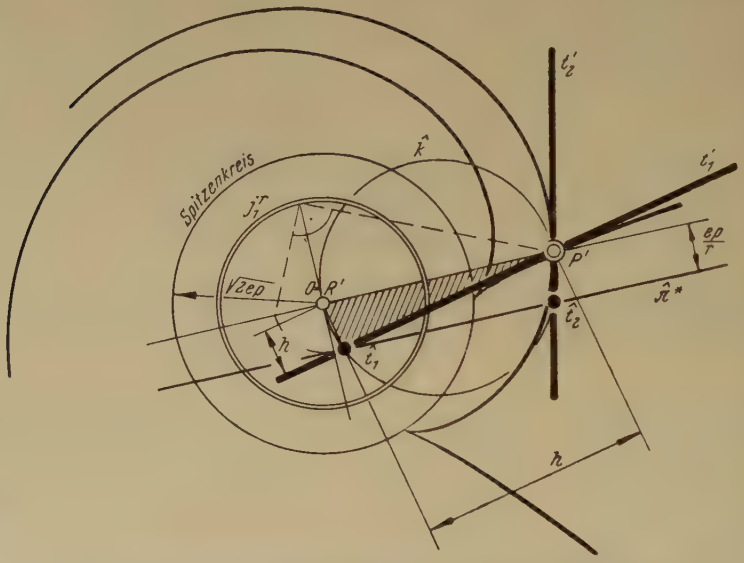

Abb. 5. Komplexkurven auf einem koaxialen Drehparaboloid (von den Komplexkurven durch P wurde nur je ein Ast gezeichnet)

der betrachteten Komplexkurven durch P. Drückt man die Fläche des Dreiecks $O\hat{t}_1 P'$ bzw. $O\hat{t}_2 P'$ auf zwei Arten aus, so ergibt sich unter Verwendung polarer Speerkoordinaten h, φ die *Differentialgleichung der Grundrisse der Komplexkurven* auf Ψ_1:

$$h\dot{h} = ep. \tag{36}$$

Die Lösungskurven

$$h^2 = 2\,ep(\varphi + \varphi_0) \tag{37}$$

bilden eine Drehschar um O. Sie entsteht durch Drehung der Kurve $h^2 = 2\,ep\varphi$ um O, die *polar zum Krummstab* $r^2\varphi = 2\,ep$ bezüglich des Kreises $(O; \sqrt{2\,ep})$ ist und aus zwei zu O zentrisch symmetrischen Ästen besteht.

Die Drehschar (37) läßt sich auch *graphisch* leicht erfassen (Abb. 6): Setzt man $\varphi = \varphi_1 = \text{konst}$, so erhält man Wertepaare h, $\dot{h}$, die parallele

Linienelemente normal zur Richtung φ_1 festlegen. Ihre Trägerkurve — eine *Isokline* des Richtungsfeldes der Differentialgleichung (36) —, ist nach (36) eine *gleichseitige Hyperbel* mit der Mitte O und der halben Hauptachse $\sqrt{2\,ep}$, sämtliche Isoklinen bilden daher eine Drehschar konzentrischer gleichseitiger Hyperbeln. Damit läßt sich unter Verwendung eines in O drehbar gelagerten durchsichtigen Papieres die

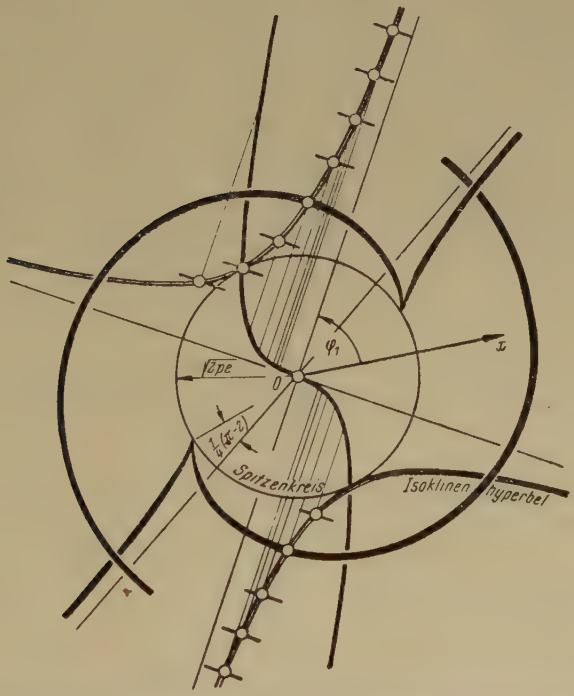

Abb. 6. Graphische Integration der Differentialgleichung der Komplexkurven auf einem koaxialen Drehparaboloid

Differentialgleichung (36) graphisch integrieren. — Differenziert man (36) nach φ und eliminiert daraus mittels (36) h, so entsteht $ep\ddot{h} + \dot{h}^3 = 0$. Daraus erkennt man, daß die zu den Linienelementen einer Isoklinenhyperbel gehörigen *Krümmungsmitten* eine *kubische Parabel* erfüllen, deren Wendetangente zu der Richtung der Linienelemente parallel ist und die jene zur Richtung der Linienelemente normale Hyperbelasymptote als Achse besitzt. Diese kubische Parabel schneidet die Isoklinenhyperbel in ihren Hauptscheiteln; diese Punkte sind daher Spitzen von Drehscharkurven. Unter Verwendung dieser kubischen

Parabel kann man die Lösungskurven (37) bei dem oben geschilderten graphischen Verfahren sogar durch aneinander gereihte Bogenstücke von Krümmungskreisen approximieren. Der gemeinsame Scheitelkreis der Isoklinenhyperbeln ist der Ort der Spitzen der Kurven (37), die Spitzentangenten schließen gegen den Radiusvektor zur Spitze einen Winkel von $\pi/4$ ein, berühren also den Kreis $(O; \sqrt{ep})$. Die Asymptote jeder der Kurven (37) ist — wie eine elementare Rechnung zeigt — gegen den Radiusvektor zu ihrer Spitze unter den Winkel $(\pi - 2)/4$ geneigt.

Die *Komplexkurven* auf dem Paraboloid Ψ_1 sitzen mit Spitzen auf jenem Breitenkreis von Ψ_1 auf, in dessen Punkten die Komplexkegel von $\mathfrak{T}(p)$ die Fläche Ψ_1 berühren; dieser Spitzenkreis besitzt den Radius $\sqrt{2\,ep}$. Bei Anwendung des Polarsystems $\mathfrak{P}_1$ gehen diese Komplexkurven der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ in die Komplexkurven der gegengewundenen Schraubung $\mathfrak{S}^*(-p)$ auf Ψ_1 über, die aus den betrachteten Komplexkurven durch Spiegelung an einer Meridianebene von Ψ_1 entstehen.

§ 5. Schnittkongruenz eines Schraubtangentenkomplexes mit dem Tangentenkomplex eines koaxialen gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids

Das Polarsystem $\mathfrak{P}_2(e)$ des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids $\Psi_2(e)$ (17)

$$u^* = -y_1 : e\,z_1,\ v^* = -x_1 : e\,z_1,\ w^* = 1 : z_1 \tag{38}$$

lautet im Geradenraum

$$p_{01}^* : p_{02}^* : p_{03}^* : p_{23}^* : p_{31}^* : p_{12}^* = -ep_{01} : ep_{02} : p_{12} : -ep_{23} : ep_{31} : e^2 p_{03}. \tag{39}$$

Die *Schnittkongruenz* $K_2(p, e)$ des Schraubtangentenkomplexes $\mathfrak{T}(p)$ (23) der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ mit dem Tangentenkomplex des Paraboloids Ψ_2

$$e(e\,p_{03}^2 + 2\,p_{02}\,p_{31} - 2\,p_{01}\,p_{23}) + p_{12}^2 = 0 \tag{40}$$

geht bei Anwendung des Polarsystems $\mathfrak{P}_2$ in sich über. K_2 *ist* wieder *eine* (4,4)-*Kongruenz*, Ψ_2 ein Bestandteil ihrer Brennfläche.

Die Ortsfläche der Gratpunkte in der Schraubung $\mathfrak{S}(p)$ der Strahlen von K_2 ist die *Gratpunktfläche* Φ_2

$$(x^2 + y^2)^2 - 2\,ep(x^2 - y^2) - 4\,e\,x\,y\,z + e^2 p^2 = 0. \tag{41}$$

Diese Gratpunktfläche Φ_2, deren Punkte als Bahntangenten die Strahlen der Kongruenz K_2 besitzen, erhält man auch als Linearkombination zweier Ebenenquadrupel mit der symbolischen Gleichung

$$\varepsilon_0\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3 - 4\,e\,\pi_0\,\pi_1\,\pi_2\,\pi_3 = 0, \tag{42}$$

wobei π_k die Ebenen des Koordinatentetraeders und ε_k die vier Minimalebenen $y \pm i(x \pm \sqrt{ep}) = 0$ bedeuten. Die vier Ebenen ε_k und die drei Ebenen π_0, π_1, π_2 gehören dem Bündel durch den Fernpunkt Z_u der Schraubachse an. Φ_2 ist ein *spezielles Monoid 4. Ordnung* [7]. Die Fläche besitzt in Z_u einen dreifachen Punkt, dessen Tangentialkegel 3. Ordnung in die drei Ebenen π_0, π_1, π_2 zerfällt. Der Schnitt von Φ_2 mit der Ebene $\pi_3(z = 0)$ besteht aus den vier Minimalstrahlen durch die Punkte $(\pm\sqrt{ep}, 0)$. Die sechs Ecken des von diesen vier Minimalstrahlen gebildeten Vierseits sind Doppelpunkte der Fläche. Φ_2 ist somit auch ein *Sonderfall des Cayley-Symmetroids* [8]. Die Verbindungsgeraden des dreifachen Punktes Z_u mit diesen sechs Doppelpunkten sind weitere Geraden der Fläche. Φ_2 trägt somit genau 10 Geraden, im Gegensatz zum allgemeinen Monoid 4. Ordnung, das bekanntlich 16 Geraden enthält. Längs jeder dieser Geraden wird Φ_2 von einer festen Ebene berührt, insbesondere berühren die drei Koordinatenebenen π_0, π_1, π_2 durch Z_u die Fläche sogar längs zwei Geraden. — Die Projektion jedes ebenen Schnittes aus dem dreifachen Punkt Z_u auf $\pi_3(z = 0)$ ist eine Quartik durch die sechs Doppelpunkte und berührt dort im allgemeinen die in π_3 liegenden Koordinatenachsen. Geht die Schnittebene jedoch durch eine dieser Koordinatenachsen, so besitzt die Projektion in den beiden auf dieser Achse liegenden Punkten Doppelpunkte. Insbesondere sind die Grundrisse der Schichtenlinien von Φ_2 bizirkulare Quartiken.

Jeder Strahl der Kongruenz $K_2(p, e)$ ist Grattangente einer bestimmten Ebene; diese Ebenen erfüllen die zum Monoid Φ_2 (41) bezüglich des Paraboloids Ψ_2 polare Fläche $\Phi_2{}^*$:

$$e^2(u^2 + v^2)^2 + 2\,e\,p\,w^2(u^2 - v^2) - 4\,e\,u\,v\,w + p^2\,w^4 = 0. \tag{43}$$

Diese *Fläche 4. Klasse* erhält man auch als Linearkombination zweier Ebenenquadrupel

$$E_0\,E_1\,E_2\,E_3 - 4\,e\,P_0\,P_1\,P_2\,P_3 = 0, \tag{44}$$

wobei P_k die Ecken des Koordinatentetraeders und E_k die vier Punkte $\sqrt{e}\,u \pm i\,(\sqrt{e}\,v \pm \sqrt{p}\,w) = 0$ bedeuten.

Die Tangenten der *Komplexkurven* des Schraubtangentenkomplexes $\mathfrak{T}(p)$ auf dem Paraboloid Ψ_2 erfüllen ebenfalls die Kongruenz K_2. Die Grundrisse t_1', t_2' der beiden durch den Flächenpunkt $P(x_1, y_1, z_1)$ von Ψ_2 gehenden Kongruenzstrahlen t_1, t_2 ergeben sich analog wie im Fall

des Drehparaboloids Ψ_1 als Verbindungsgeraden von P' mit den Schnittpunkten $\hat{t}_1'$, $\hat{t}_2'$ der Drehflucht $\hat{\pi}^*$ (18) der Tangentialebene π^* von P mit dem Drehfluchtkreis $\hat{k}$

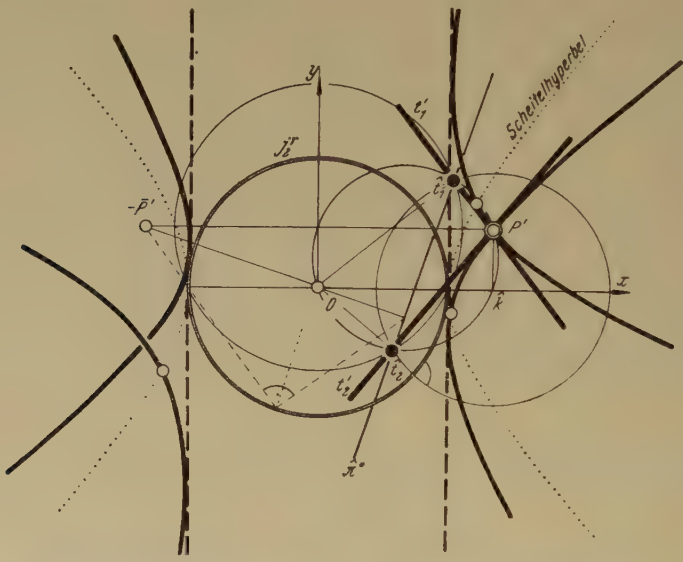

Abb. 7. Komplexkurven auf einem koaxialen gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid

$$x^2 + y^2 - x\,x_1 - y\,y_1 = 0 \tag{45}$$

des Komplexkegels $\varkappa$ von P (Abb. 7). Nach (18) und (45) ergeben sich für die Anstiege der Verbindungsgeraden von O mit $\hat{t}_1$, $\hat{t}_2$

$$m_{1,\,2} = \pm\sqrt{(x_1^2 - e\,p) : (y_1^2 + e\,p)}. \tag{46}$$

Daraus folgt als *Differentialgleichung der Grundrisse der gesuchten Komplexkurven*

$$dx\sqrt{y_1^2 + e\,p} \pm dy\sqrt{x_1^2 - ep} = 0. \tag{47}$$

Diese Differentialgleichung ergibt sich rein analytisch unter Verwendung der *Monge*schen Gleichung $p(dx^2 + dy^2) - dz(x\,dy - y\,dx) = 0$ des Schraubtangentenkomplexes $\mathfrak{T}(p)$ durch Elimination von dz mittels der Gleichung des Paraboloids Ψ_2 (17).

Die Lösungskurven der Differentialgleichungen (47) lassen sich vereinen in der Gestalt:

$$x^2 - y^2 + (\lambda - \frac{1}{\lambda})\, x\, y - \frac{ep}{4}\,(\lambda + \frac{1}{\lambda})^2 = 0, \tag{48}$$

wobei λ der Parameter der Kurvenschar ist. Die *gleichseitigen konzentrischen Hyperbeln* (48) bilden eine Kegelschnittschar mit dem Grundtangenten

$$x = \pm\sqrt{ep},\; y = \pm\sqrt{-ep}. \tag{49}$$

Diese vier Geraden sind die singulären Lösungen der Differentialgleichung (47). Die Scheitel der Scharkurven erfüllen die spezielle Scharhyperbel $x^2 - y^2 = ep$. Die Scheiteltangenten stehen normal auf den zugehörigen Ortsvektoren, sie sind daher die Grundrisse der Schraubtangenten dieser Scheitelpunkte. Der Ort der zugehörigen Raumpunkte, selbst eine Komplexkurve auf Ψ_2, gehört daher auch der Gratpunktfläche Φ_2 an; aus den Gleichungen (17) und (41) erkennt man, daß sich die beiden Flächen längs dieser Komplexkurve sogar berühren.

Die Komplexkurven auf Ψ_2 sind *Raumkurven 4. Ordnung erster Art*[3], die sämtlich jenes windschiefe Erzeugendenvierseit von Ψ_2 berühren, dessen Seiten Schraubtangenten sind und als Grundrisse die Geraden (49) besitzen. Diese Komplexkurven ergeben sich als Durchdringungskurven von Ψ_2 mit jenen Flächen des Gebüsches der Paraboloide Ψ_2, die das genannte windschiefe Erzeugendenvierseit berühren; diese Flächen bilden ein Büschel. Durch Anwendung des Polarsystems $\mathfrak{P}_2$ werden die beiden Komplexkurvenscharen auf Ψ_2 vertauscht, sie bilden also ein konjugiertes Netz.

Alle Kongruenzstrahlen die durch die Punkte einer Erzeugenden des Paraboloids Ψ_2 gehen, erfüllen eine gewisse *Strahlfläche* Ω, die die Brennfläche der Kongruenz K_2 berührt. Die zur Paraboloiderzeugenden e_x bzw. e_y in der Ebene $x = x_1$ bzw. $y = y_1$ gehörige Fläche Ω_x bzw. Ω_y besitzt als Drehflucht den Ort der Drehfluchtpunkte $\hat{t}_1$, $\hat{t}_2$ der die Paraboloiderzeugende e_x bzw. e_y schneidenden Kongruenzstrahlen. Diese Punkte erfüllen, wie sich aus den Gleichungen (18) und (45) ergibt, den Kreis

$$(x - x_1)^2 + y^2 = x_1^2 - ep \tag{50}$$

bzw.

---

[3] Diese gleichseitigen hyperbolischen Paraboloide besitzen — wie man leicht einsieht — das ausgeartete Grundtetraeder der Schraubung als Poltetraeder. Als Kurven eines tetraedralen Komplexes auf solchen Quadriken hat schon *S. Lie* [9] für den Fall eines nichtausgearteten Grundtetraeders Raumkurven 4. Ordnung 1. Art angegeben, den Fall des euklidischen Schraubtangentenkomplexes behandelt in jüngster Zeit *A. Frey — K. Strubecker* [10].

$$x^2 + (y - y_1)^2 = y_1^2 + ep, \tag{51}$$

der ein Orthogonalkreis zum Kreis $(0; \sqrt{ep})$ bzw. $(0; \sqrt{-ep})$ ist (Abb. 7). Die Fläche Ω_x wird durch eine (2, 1)-Korrespondenz zwischen e_x und einem Fernkreis, dessen Drehflucht der Kreis (50) ist, erzeugt und liegt im parabolischen Netz aller Flächentangenten von Ψ_2 längs e_x. Ω_x ist daher eine *Strahlfläche 4. Grades* und nach der *Sturm*schen Einteilung von *VIII. Art* [11]. Sie besitzt e_x als doppelte Leitgerade und berührt sich längs dieser selbst; außerdem hat sie die Ferngerade der Ebene $x = 0$ als Doppelerzeugende. Der Tangentialkegel, den man der Fläche aus dem Fernpunkt Z_u der Schraubachse umschreiben kann, ist, da Z_u ein Punkt der Doppelerzeugenden ist, ein Zylinder 2. Grades; der erste scheinbare Umriß ist daher ein *Kegelschnitt*. Entsprechendes gilt für die Strahlfläche Ω_y. Die Umrißkegelschnitte von Ω_x bzw. Ω_y besitzen übrigens die x- bzw. y-Achse als Hauptachse und die konstante Nebenachsenlänge $2\sqrt{-ep}$ bzw. $2\sqrt{ep}$. Da die Flächen Ω_x und Ω_y das Paraboloid Ψ_2 berühren müssen, berühren diese Umrißkegelschnitte den scheinbaren Umriß des Paraboloids Ψ_2; das ist aber das Minimalstrahlenpaar durch O. Der Punkt O ist daher gemeinsamer Brennpunkt aller dieser Umrißkegelschnitte. Die Spurkurve von Ω_x bzw. Ω_y ist eine *zirkulare rationale Quartik* vom Typ

$$g_1^4 + \lambda\, g_2^2\, g_3\, g_4 = 0, \tag{52}$$

wenn g_i je ein linearer Ausdruck in den Koordinaten ist. Sie besitzt im Mittelpunkt des scheinbaren Umrisses einen Berührknoten und einen Inflexionsknoten im Fernpunkt der y- bzw. x-Achse und berührt den Umrißkegelschnitt.

Die scheinbaren Umrisse sämtlicher Flächen Ω_x bzw. Ω_y sind ∞^1 monofokale Kegelschnitte mit gleicher Nebenachsenlänge, deren Hüllkurve die Minimalstrahlen durch O und die Grundrisse zweier Schraubtangenten von Ψ_2 sind, die gemeinsame Scheiteltangenten der Kegelschnitte abgeben. Jede dieser Flächen Ω_x bzw. Ω_y geht durch das Polarsystem $\mathfrak{P}_2$ von Ψ_2 über in eine Fläche Ω_y bzw. Ω_x. Die Brennfläche der Kongruenz K_2 besitzt als ersten scheinbaren Umriß drei Geradenpaare, wobei die Minimalstrahlen durch O als scheinbarer Umriß des Paraboloids Ψ_2 fingieren, während die Restbrennfläche die Grundrisse der vier Schraubtangenten auf Ψ_2 als scheinbaren Umriß besitzt. Diese Brennfläche ist im Polarsystem $\mathfrak{P}_2$ *autopolar*.

Literaturverzeichnis

[1] *R. Bereis-H. Brauner*, Die automorphen involutorischen Korrelationen koaxialer projektiver Schraubungen. Sitzb. Akad. Wiss. Wien 156 (1956), 327—355.

[2] *Th. Schmid*, Darstellende Geometrie II, 2. Aufl., Sammlung Schubert, LXVI (1923), 225ff.

[3] *E. Müller*, Die achsiale Inversion. Jber. DMV 25 (1916), 209—251.

[4] *K. Strubecker*, Über kubische Verwandtschaften bei nichteuklidischen Schraubungen. Sitzb. Akad. Wiss. Wien 140 (1931), 574ff.

[5] *L. Eckhart*, Über Flächen vierter Ordnung, deren Fallinien Kegelschnitte sind. Sitzb. Akad. Wiss. Wien 131 (1922), 417—427.

[6] *W. Wunderlich*, Über die Torusloxodromen. Mh. Math. 56 (1952), 226.

[7] *K. Rohn*, Über die Flächen vierter Ordnung mit dreifachem Punkt. Math. Ann. 24 (1884), 55—151.

[8] *W. Fr. Meyer*, Spezielle algebraische Flächen. Enz. math. Wiss. III C 10, 1641, 1681ff.

[9] *S. Lie-G. Scheffers*, Geometrie der Berührungstransformationen. Teubner, Leipzig (1896), 353.

[10] *A. Frey-K. Strubecker*, Die Transformationstheorie der quadratischen Linienkomplexe [(11) (22)] I. Journ. f. reine u. angew. Math. 193 (1954), 235f.

[11] *E. Müller-J. Krames*, Konstruktive Behandlung der Regelflächen. Vorlesungen über Darstellende Geometrie III, Deuticke, Leipzig, Wien (1931), 262f.

Berechnung einiger unendlicher Integrale

Von

M. T. Eweida, Baghdad, Iraq

(Eingegangen am 22. Januar 1957)

Einleitung. M. M. *Jean Guy* und *Jacques Tillieu* [1] haben das Integral $C_m = \int_1^\infty \lambda^m e^{-a\lambda} (\lambda^2 - 1)^{1/2}\, d\lambda$, ($a > 0$, m positiv, ganz) berechnet, um die Zahlenwerte von C_m für verschiedene Werte von m und a zu bekommen. Der Weg dieser Autoren scheint lang und umständlich zu sein. Hier soll ein kurzer Beweis ihrer Formel gegeben werden. Ebenso werden die zwei Integrale

$$A_n(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^n} (t^2 - 1)^{1/2}\, dt$$

und

$$B_n(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^n (t^2 - 1)^{1/2}}\, dt \quad (z > 0,\ n \text{ positiv, ganz})$$

für alle Werte von $n \geqq 1$ ausgerechnet.

Wir werden von den folgenden Ergebnissen [2], [3] Gebrauch machen. Wenn $K_n(z)$ und $L_n(z)$ die modifizierten Besselfunktion zweiter Art und entsprechend die modifizierte Struvefunktion sind, haben wir

$$\int_1^\infty e^{-zt} (t^2 - 1)^{\nu - 1/2}\, dt = 2^\nu \frac{\Gamma(\nu + 1/2)}{\Gamma(1/2)} \left\{\frac{K_\nu(z)}{z^\nu}\right\} \quad (z > 0,\ \nu \geqq -1/2) \tag{1}$$

$$\frac{d^m}{dz^m} \left\{\frac{K_\nu(z)}{z^\nu}\right\} = \frac{K_{\nu+m}(z)}{z^\nu} \tag{2}$$

$$\int^z K_0(z)\, dz = \frac{\pi z}{2} [K_0(z) L_{-1}(z) + L_0(z) K_1(z)] \tag{3}$$

Unsere Ergebnisse finden in den folgenden Sätzen ihren Ausdruck:

Theorem 1. Wenn $z > 0$ und m eine positive ganze Zahl ist, ist

$$\int_1^\infty t^m e^{-zt} (t^2-1)^{\nu-1/2}\, dt = 2^\nu \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1/2)} \left\{\frac{K_{\nu+m}(z)}{z^\nu}\right\}$$

Theorem 2. Wenn $z > 0$, dann ist

$$A_1(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t} (t^2-1)^{1/2}\, dt = K_1(z) + \frac{\pi z}{2} [K_0(z) L_{-1}(z) + L_0(z) K_1(z)]$$

$$A_2(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^2} (t^2-1)^{1/2}\, dt = K_0(z) - z A_1(z)$$

$$B_1(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t(t^2-1)^{1/2}}\, dt = K_1(z) - A_1(z)$$

$$B_2(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^2(t^2-1)^{1/2}}\, dt = z A_1(z)$$

$$A_n(z) = \frac{z A_{n-3}(z)}{(n-1)} + \left(\frac{n-4}{n-1}\right) A_{n-2}(z) - \frac{z A_{n-1}(z)}{(n-1)} \qquad (n > 2$$

und

$$B_n(z) = \frac{z B_{n-3}(z)}{(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) B_{n-2}(z) - \frac{z B_{n-1}(z)}{(n-1)} \quad (n > 2)$$

Beweis von Theorem 1.

Aus (1) erhalten wir für $z > 0$ und $\nu \geqq -1/2$

$$\int_1^\infty e^{-zt} (t^2-1)^{\nu-1/2}\, dt = 2^\nu \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1/2)} \left\{\frac{K_\nu(z)}{z^\nu}\right\}$$

Differenzieren wir diese Gleichung m mal nach z, dann erhalten wir

$$(-1)^m \int_1^\infty t^m e^{-zt} (t^2-1)^{\nu-1/2}\, dt = 2^\nu \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1/2)} \frac{d^m}{dz^m} \left\{\frac{K_\nu(z)}{z^\nu}\right\}$$

Unter Verwendung von (2) folgt, daß

$$\int_1^\infty t^m e^{-zt} (t^2-1)^{\nu-1/2}\, dt = \frac{2^\nu\, \Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1/2)} \left\{\frac{K_{\nu+m}(z)}{z^\nu}\right\}$$

Ergänzung: Wenn $\nu=1$, dann ist $C_m = \int_1^\infty \lambda^m (\lambda^2-1)^{1/2} e^{-a\lambda}\, d\lambda = \frac{K_{m+1}(a)}{a}$ $(a > 0)$ und die Zahlenwerte von C_m werden leicht aus den Tafeln für $K_n(z)$ erhalten.

Beweis von Theorem 2. Es ist leicht einzusehen, daß

$$A_0(z) = \frac{K_1(z)}{z}, \quad B_0(z) = K_0(z)$$

$$A_n(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh\Theta}\ \operatorname{sech}^n\Theta \sinh^2\Theta\, d\Theta,$$

$$B_n(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh\Theta}\ \operatorname{sech}^n\Theta\, d\Theta$$

und

$$A_n(z) + B_n(z) = B_{n-2}(z).$$

Nun ist

$$A_1(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t}(t^2-1)^{1/2}\, dt.$$

Daraus

$$\frac{d\,A_1(z)}{dz} = -\int_1^\infty e^{-zt}(t^2-1)^{1/2}\, dt.$$

Es folgt, daß

$$A_1(z) = -\int^z \frac{K_1(z)}{z}\, dz.$$

Aber es ist

$$-\frac{K_1(z)}{z} = K_0(z) + K_1'(z),$$

so daß

$$-\int^z \frac{K_1(z)}{z}\, dz = K_1(z) + \int^z K_0(z)\, dz.$$

Daher folgt aus (3)

$$A_1(z) = K_1(z) + \frac{\pi z}{2}\cdot[K_0(z)\,L_{-1}(z) + L_0(z)\,K_1(z)]$$

$$A_2(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^2}(t^2-1)^{1/2}\, dt.$$

Durch Integration nach Teilen erhalten wir

$$A_2(z) = -z\,A_1(z) + K_0(z)$$

$$B_1(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t(t^2-1)^{1/2}}\, dt.$$

Also

$$\frac{d\,B_1(z)}{dz} = -\int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{(t^2-1)^{1/2}}\, dt = -K_0(z).$$

Daraus

$$B_1(z) = -\int^{z} K_0(z)\, dz \text{ (bis auf eine willkürliche Konstante).}$$

Es folgt, daß

$$B_1(z) = K_1(z) - A_1(z)$$

$$B_2(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\cosh\Theta}\ \operatorname{sech}^2\Theta\, d\Theta.$$

Durch Integration nach Teilen erhalten wir

$$B_2(z) = z\int_0^{\infty} e^{-z\cosh\Theta}\ \operatorname{sech}\Theta \sinh^2\Theta\, d\Theta.$$

Daraus

$$B_2(z) = z\, A_1(z).$$

Daraus können wir mit Benutzung der Zahlentafeln für $K_n(z)$ und $L_n(z)$ leicht die Zahlenwerte von $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$ und $B_2(z)$ für verschiedene Werte von z erhalten.

Eine neuerliche Integration nach Teilen ergibt

$$A_n(z) = \frac{z\, A_{n-3}(z)}{(n-1)} + \left(\frac{n-4}{n-1}\right) A_{n-2}(z) - \frac{z\, A_{n-1}(z)}{(n-1)} \qquad (n>2) \qquad (4)$$

$$B_n(z) = \frac{z\, B_{n-3}(z)}{(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) B_{n-2}(z) - \frac{z\, B_{n-1}(z)}{(n-1)} \qquad (n>2) \qquad (5)$$

Diese zwei Rekursionsformeln ermöglichen es uns, $A_n(z)$ und $B_n(z)$ für alle $n > 2$ zu berechnen.

(4) und (5) können in folgender Weise geschrieben werden:

$$z\frac{d^3 A_n(z)}{dz^3} - (n-4)\frac{d^2 A_n(z)}{dz^2} - z\frac{d\, A_n(z)}{dz} + (n-1)\, A_n(z) = 0$$

$$z\frac{d^3 B_n(z)}{dz^3} - (n-2)\frac{d^2 B_n(z)}{dz^2} - z\frac{d\, B_n(z)}{dz} + (n-1)\, B_n(z) = 0.$$

Dies sind die zwei Differentialgleichungen, welche durch $A_n(z)$ und $B_n(z)$ befriedigt werden.

Literatur

[1] *Jean Guy & Jacques Tillieu.* — Le Journal de Physique et le Radium, V. 16, P 801, 1955.

[2] *Watson.* — Theory of Bessel Functions. Camb. Press 1952.

[3] *Bateman.* — Higher Transcendental Functions, V. 1.

Buchbesprechungen

Gesammelte Mathematische Schriften. Von *C. Carathéodory*. Band V. Mit einem Bild, XV, 447 S. München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung. 1957. DM 43.—, geb. DM 48.—.

Mit diesem Band finden die „Gesammelten mathematischen Schriften" *Carathéodory*'s ihren Abschluß. Neben einigen wenigen geometrischen Arbeiten und einer Arbeit über partielle Differentialgleichungen enthält der Band eine Reihe von biographischen Noten in Form von Glückwunschadressen, Ansprachen und Nachrufen, die *Carathéodory* aus mannigfachen Anlässen verfaßt hat, ferner zahlreiche Aufsätze verschiedenen Inhalts, Rezensionen und etliche nachgelassene Schriften. Unter diesen findet man insbesondere eine Facsimile-Reproduktion der Disposition des letzten Vortrages *Carathéodory*'s im Münchener Mathematischen Colloquium am 16. Dezember 1949. Von den Aufsätzen sei der umfangreiche Bericht über die Variationsrechnung bei *Euler* hervorgehoben, ferner die wenig bekannte Abhandlung „Maßtheorie und Integral", sowie das Schlußwort zur Enzyklopädie. Die Denkschrift über die Neuorganisation der Universität Athen zeigt den Eifer und die Gründlichkeit, mit der sich *Carathéodory* für das Wohl der Einrichtungen, mit denen er verbunden war, eingesetzt hat. Weiter enthält der Band autobiographische Notizen, die *Carathéodory* anläßlich seiner Wahl zum Ehrenmitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften aufgezeichnet hat, ferner die von *Erhard Schmidt* verfaßte Würdigung *Carathéodory*'s anläßlich seines 70. Geburtstages. Schließlich ist dem Band eine Zusammenstellung der Publikationen *Carathéodory*'s in chronologischer Reihenfolge sowie ein Inhaltsverzeichnis für alle fünf Bände der „Gesammelten mathematischen Schriften" beigefügt.

Diese Schriften bieten so viel bleibend Wertvolles, daß man immer wieder in die Lage kommen wird, sie beim mathematischen Arbeiten zu Rate zu ziehen. Der fünfte Band, der den rein fachlichen Rahmen überschreitet, ist so anregend und interessant, daß man ihn schwerlich aus der Hand legen wird, ohne ihn ganz gelesen zu haben. *K. Mayrhofer*, Wien

Luigi Bianchi: Opere. Vol. IV: Deformazioni delle quadriche. Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche. Parte seconda. 366 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1956. Lire 3000.

Dieser Band enthält elf Arbeiten des Autors zur Transformationstheorie der Flächen. *N. Hofreiter*, Wien

Mathematical Logic. Von *R. L. Goodstein*. VIII, 104 S. Leicester: University Press. 1957. 21 s.

Der bekannte Verfasser stellt sich die Aufgabe, die wichtigsten Sätze der mathematischen Logik wie z. B. die Sätze von *Gödel*, *Skolem* und *Church* darzustellen. Das Buch ist für einen breiten Leserkreis bestimmt. Zunächst wird der Aussagen- und Prädikatenkalkül dargelegt und das Vollständigkeitstheorem

von *Gödel* nach *Henkin* bewiesen. Es ist schade, daß der Verfasser keine mathematischen Anwendungen dieses Satzes gibt. Dann wird die Zahlentheorie, insbesondere die rekursive Arithmetik und der λ-Kalkül von *Church* entwickelt. Den Höhepunkt stellt dann das vierte Kapitel dar, welches den berühmten Satz von *Gödel* über die Unentscheidbarkeit der Arithmetik, den Satz von *Church* und die Nicht-Charakterisierbarkeit der Zahlenreihe durch ein abzählbares System von Axiomen nach *Skolem* bringt. Das Buch schließt mit dem erweiterten Prädikatenkalkül von *Quine*. Die Darstellung ist konzis, aber sehr klar und kann für alle Studenten der Mathematik und auch vor allem für Lehrer für Mathematik wärmstens empfohlen werden. *E. Hlawka*, Wien

Der böhmische Vormärz in Briefen B. Bolzanos an F. Prihonsky. Herausgegeben von *E. Winter*. (Beiträge zur deutsch-slawischen Wechselseitigkeit.) Mit 1 Tafel, IX, 306 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1956. DM 39.—, geb. DM 43.—.

Bei der großen Bedeutung, die *Bolzano* für die Grundlegung der modernen Mathematik zukommt, erscheint es naheliegend, einem Werk, wie dem vorliegenden, in dem die einzigartige Stellung *Bolzanos* in der kulturellen und politischen Entwicklung in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts dargestellt ist, Interesse zu schenken. Der Verfasser, der selbst eine ausführliche Biographie von *Bolzano* herausgab, schildert in äußerst geistreicher und ungemein anregender Form in einer ca. 100 Seiten umfassenden Einleitung die interessanten und komplizierten kulturellen und politischen Verhältnisse in Böhmen und insbesondere die Verfolgungen, in die *Bolzano* verwickelt war. Hierauf folgt eine Sammlung von Briefen an *Prihonsky*, dem Herausgeber der Paradoxien des Unendlichen, seinen besten Schüler und Freund, der vor allem als Philologe (Sorbisch) tätig war. Für Mathematiker ist insbesondere einer dieser Briefe von großem Interesse. Es hat nämlich von jeher die Frage interessiert, ob *Cauchy*, der im Gefolge des französischen Hofes, der in Prag nach der Julirevolution ein Asyl fand, einige Monate als Prinzenerzieher verbrachte, mit *Bolzano*, dem wegen seiner freiheitlichen Gesinnung abgesetzten Theologieprofessor, zusammentraf. Dieser Brief lautet: „... Die Nachricht von der Anwesenheit *Cauchys* in Prag ist für mich ungemein interessant. Er ist unter allen jetzt lebenden Mathematikern derjenige, den ich am meisten schätze und dem ich mich am verwandtesten fühle; seinem Erfindungsgeist danke ich einige der wichtigsten Beweise. Ich bitte mich, ihm bestens zu empfehlen und zu sagen, daß ich jetzt gleich nach Prag gereist wäre, um seine persönliche Bekanntschaft zu machen, wenn ich — nach dem, was Sie mir von seiner Anstellung sagen, nicht sicher hoffen könnte, daß ich ihn Ende September, wo ich Sie begleiten will, noch antreffen werde ..."

Ob nun eine derartige Zusammenkunft stattgefunden hat, ist trotzdem wegen der damals herrschenden politischen Gegensätze keineswegs sicher. Von Interesse sind auch zwei Briefe, aus denen hervorgeht, daß sich *Bolzano* sehr intensiv mit der Theorie der Parallelen beschäftigt hat. *P. Funk*, Wien

Vektoralgebra. Von *M. Hieke*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 4.) Mit 67 Textabb., VI, 154 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1956. DM 9.20.

Diese Einführung in die Vektorrechnung ist wohl vor allem für den angehenden Physiker bestimmt. Deshalb wird hauptsächlich der dreidimensionale Fall behandelt und die geometrische Bedeutung der Begriffe und Sätze steht im Vordergrund; an zahlreichen Beispielen wird gezeigt, wie wertvoll die Vektorrechnung für die Behandlung physikalischer Probleme ist. Das Buch ist sehr

ausführlich, manchmal beinahe etwas umständlich geschrieben und infolgedessen auch für den Anfänger ohne Mühe lesbar. Eine deutlichere Hervorhebung der wichtigen Definitionen, Formeln und Sätze wäre jedoch angebracht gewesen. Mit Ausnahme einiger Sätze der Determinantentheorie benötigt der Leser kaum Vorkenntnisse, die über den Mittelschulstoff hinausgehen; deshalb kann das Buch schon den Studenten der ersten Semester empfohlen werden.

Nachstehend eine kurze Übersicht über den Inhalt: Der Vektorbegriff, Addition und Subtraktion von Vektoren. Lineare Abhängigkeit, Koordinatendarstellung. Das skalare Produkt und seine Anwendungen. Das Vektorprodukt, mehrfache Produkte. Linienvektoren und ihre Anwendung in der Physik. Darstellung von Vektoren und Transformationen durch Matrizen. Reziproke Grundsysteme. Anwendung von Vektoren in der Kristallographie. Tensoren.

W. Nöbauer, Wien

Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades (Sturmsche Methode). Von *I. R. Schafarewitsch*. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik.) Mit 10 Textabb., 29 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956. DM 1.80.

Nach einer ausführlichen Erläuterung des Begriffes der Sturmschen Kette werden solche Ketten zur Berechnung von Näherungswerten der Nullstellen von Polynomen verwendet. Im Anhang wird das Hornersche Verfahren zur Berechnung der Werte eines Polynomes an einem praktischen Beispiel dargelegt.

J. Laub, Wien

Structure of Rings. Von *N. Jacobson*. (American Mathematical Society Colloquium Publications: Vol. XXXVII.) VII, 263 S. Providence: American Mathematical Society. 1956.

Eine zusammenhängende Darstellung des gegenwärtigen Standes der Strukturtheorie nichtkommutativer Ringe, wie sie hier gegeben wird, ist vor allem deshalb sehr zu begrüßen, weil in den letzten Jahren auch Ringe ohne Endlichkeitsbedingungen eingehend untersucht worden sind und gerade bei ihnen große Fortschritte erzielt wurden; bekanntlich war ja der Verfasser an diesen Fortschritten maßgeblich beteiligt. Das Buch entwickelt die Theorie in allgemeiner Form ziemlich von Grund auf in klarer und übersichtlicher Weise und verdeutlicht sie auch an zahlreichen Beispielen; die Struktur der Ringe mit Minimalbedingung ergibt sich aus den allgemeinen Sätzen durch Spezialisierung.

Nachstehend eine kurze Inhaltsübersicht: Zunächst werden grundlegende Sätze über das Radikal eines Ringes, über halbeinfache und primitive Ringe gewonnen und diese dann insbesondere auf Ringe mit Minimalbedingung angewendet. Weiter werden primitive Ringe mit minimalen Idealen untersucht, *Kronecker*-Produkte von Moduln und Algebren studiert, worauf ein Kapitel über voll reduzible Moduln folgt. Die nächsten drei Kapitel behandeln Schiefkörper, Nilideale und den Strukturraum eines Ringes. Abschließend werden noch einige Anwendungen der in dem Buch dargestellten Theorie auf spezielle Fragen, z. B. auf das sogenannte Problem von *Kurosch*, gegeben.

Zweifellos hat sich der Verfasser auch mit diesem Buch wiederum große Verdienste um die Ringtheorie erworben.

W. Nöbauer, Wien

Les Algèbres d'Opérateurs dans l'Espace Hilbertien (Algèbres de *von Neumann*). Von *J. Dixmier*. (Cahiers scientifiques: Fasc. XXV.) VI, 367 S. Paris: Gauthier-Villars. 1957. ffr. 5500.

Die Theorie der Operatorenringe von *Hilbert*-Räumen ist seit den grundlegenden Untersuchungen *von Neumanns* gerade in den letzten Jahren durch Beiträge zahlreicher Autoren ausgebaut worden. Nicht zuletzt auch wegen der vielseitigen Anwendbarkeit dieser Theorie im Bereich der Mathematik und der theoretischen Physik ist es sehr begrüßenswert, daß diese neuen Ergebnisse zusammengefaßt und in einheitlicher Form dargestellt werden, wie es hier geschieht. Das Buch ist im Stil von *Bourbaki* geschrieben, also zwar knapp, aber doch gut lesbar, und schließt sich auch in der Bezeichnungsweise an *Bourbaki* an. Für sein Verständnis muß der Leser schon mit der Theorie der *Hilbert*-Räume vertraut sein, wenn auch die benötigten Sätze dieser Theorie zum Teil in einem Anhang entwickelt werden. Das Buch enthält zu jedem Abschnitt Literaturhinweise und zahlreiche instruktive Übungsaufgaben.

Im ersten Kapitel werden nach Definition der *von Neumann*-Algebren zunächst grundlegende Begriffe, wie z. B. Homomorphismus, Produkt, Tensorprodukt eingeführt und Sätze darüber abgeleitet. Sodann werden topologische Eigenschaften dieser Algebren bezüglich verschiedener Topologien auf der Gesamtheit der linearen Operatoren des *Hilbert*-Raumes untersucht. Nach dem Studium der positiven Linearformen auf Operatorringen und einen Abschnitt über *Hilbert*sche (oder unitäre) Algebren und ihren Zusammenhang mit den *von Neumann*-Algebren wird die Theorie der Spuren entwickelt. Es folgt eine Untersuchung abelscher und diskreter *von Neumann*-Algebren. Das zweite Kapitel beschäftigt sich vor allem mit der Zerlegung der *von Neumann*schen und *Hilbert*schen Algebren in ein direktes Integral und enthält zahlreiche Sätze über solche Zerlegungen. Das dritte Kapitel schließlich bringt verschiedene interessante Ergänzungen der allgemeinen Theorie. Ein umfangreiches Literaturverzeichnis beschließt das inhaltsreiche Buch. *W. Nöbauer*, Wien

Algebraische Theorie der galoisschen Algebren. Von *P. Wolf*. (Mathematische Forschungsberichte: Band III.) XII, 185 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956. DM 19.60.

In der Frage nach der Existenz von galoisschen Erweiterungen eines gegebenen Körpers, deren galoissche Gruppe zu einer gegebenen endlichen Gruppe isomorph ist, und in dem Problem der Kennzeichnung aller dieser Erweiterungen sind für den Fall einer nichtabelschen Gruppe erst in den letzten Jahren weitergehende Resultate erzielt worden; nach den bahnbrechenden Untersuchungen von *Hasse* haben vor allem die Arbeiten des Verfassers die Forschung auf diesem Gebiet vorangetrieben. Das vorliegende Buch gibt eine systematische Darstellung des gegenwärtigen Standes der Theorie.

Das erste Kapitel beschäftigt sich vor allem mit der Charakterisierung der galoisschen Erweiterungen eines festen Körpers K mit vorgegebener Galoisgruppe G; dabei werden statt galoisschen Körpern über K allgemeiner galoissche Algebren über K betrachtet. Als kennzeichnende Invarianten der Erweiterungen ergeben sich Klassen von Elementen aus dem direkten Produkt des Gruppenringes von G mit sich selbst. Das zweite Kapitel behandelt das Problem, wann eine galoissche Algebra mit Galoisgruppe G durch Übergang zu einem Unterkörper des Grundkörpers zu einer galoisschen Algebra wird, die eine vorgegebene Erweiterung von G als Galoisgruppe hat. Dieses Problem führt auf zwei Systeme von „Verkettungsgleichungen", welche unter speziellen Annahmen über G und den Grundkörper näher diskutiert werden. *W. Nöbauer*, Wien

Geometric Algebra. Von *E. Artin*. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics: Nr. 3.) X, 214 S. New York: Interscience Publishers, Inc. 1957. $ 6.—.

Unter geometrischer Algebra wird hier verstanden die Theorie der Vektorräume, affine projektive Geometrie, orthogonale und symplektische Geometrie und ihre Struktur, und die allgemeine lineare Gruppe. Was aber diesem Buch die ganz besondere Bedeutung gibt, ist einmal die, daß der zugrunde gelegte Körper ein ganz beliebiger ist, also auch eine Charakteristik haben kann, die von 0 verschieden ist; dann ist die Darstellung eine ganz moderne, rein abstrakte, wie sie in *Bourbaki* üblich ist, dadurch stellt es eine Einführung in diesen Gedankenkreis dar. Das vorliegende Buch, welches aus Vorlesungen hervorgegangen ist, wird sicher dazu beitragen, daß diese abstrakten Methoden auch in weiten Kreisen des mathematischen Publikums Eingang finden, genau so, wie dies bei den Vorlesungen des Verfassers 1926 der Fall war, welche durch das Buch von *van der Waerden* so populär geworden sind, daß die damalige moderne abstrakte Algebra heute schon eine klassische ist. Um jetzt etwas auf Details einzugehen: Das erste Kapitel behandelt die Vektorräume, lineare Gleichungen, und stellt vor allem die grundlegende Dualitätstheorie der Vektorräume heraus. Hervorzuheben ist, daß die Matrix-Theorie vollkommen vermieden wird und nur an den Vektorräumen selbst operiert wird. Der Verfasser bringt auch die wichtigsten Tatsachen der Gruppen- und Körpertheorie, welche er für das weitere benötigt. Sehr schön ist der Beweis des wichtigen Satzes von *Hua*, der ja so bedeutende Anwendungen gefunden hat. Das zweite Kapitel behandelt die affine und projektive Geometrie und die Rolle der Sätze von *Desargues* und *Pappus* und ihre Bedeutung für den zugrunde gelegten Körper. Das dritte Kapitel behandelt die symplektische und orthogonale Geometrie, wo der Einfachheit halber die Körper mit der Charakteristik 2 ausgelassen werden. Im vierten Kapitel wird dann die Struktur der allgemeinen linearen Gruppe behandelt und hierbei auch die Theorie der nichtkommutativen Determinanten entwickelt. Abgeschlossen wird dieses Kapitel mit der Theorie der Vektorräume über endliche Körper; diese Darstellung ist besonders elegant. Das Buch schließt mit der Theorie der Struktur der symplektischen und orthogonalen Gruppe, welche wohl den Höhepunkt des Buches darstellt. Selbstverständlich spielt die *Clifford*sche Algebra eine große Rolle und man wird bis zur Front der mathematischen Forschung geführt. Aus dieser Inhaltsangabe ersieht man, daß es sich um ein ganz fundamentales Werk handelt. Die Darstellung ist außerordentlich klar und von dem bekannten Temperament des Verfassers getragen. *E. Hlawka*, Wien

Elementare Beweise der Primzahlsätze. Von *W. Specht*. 78 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956. DM 6.40.

Das vorliegende Büchlein bringt die elementaren Beweise des Primzahlsatzes und des Primzahlsatzes für die arithmetische Progression in ausführlicher Darstellung. Grundlage dieser Beweise ist die von *A. Selberg* entdeckte Beziehung. Es gibt mehrere verschiedene Wege, um aus dieser den Primzahlsatz herzuleiten und der Verfasser schließt sich an den von *A. Selberg* gegebenen Weg an. Es sind zur Lektüre keinerlei spezielle Kenntnisse nötig; so werden z. B. die Eigenschaften der Charaktere, welche zum Beweis des Primzahlsatzes für die arithmetische Progression gebraucht werden, vollständig entwickelt. Übrigens weicht die Bezeichnung etwas von der üblichen ab; z. B. wird statt $\psi(x, k, l)$, $\pi(x, k, l)$ geschrieben: $\psi_1(k, l; x)$, $\pi(h, l; x)$. Unter Satz 13 werden zwei Gleichungen als „Gleichungen von *A. Selberg*" bezeichnet, deren erste $\psi(x) = 0(x)$ jedoch schon von *Tschebyscheff* herrührt; hierauf sollte vielleicht ein mit der Sachlage nicht vertrauter Leser aufmerksam gemacht werden.

Man wird das Erscheinen dieses Büchleins um so mehr begrüßen, als zwar der elementare Beweis des Primzahlsatzes bereits in mehreren Büchern zu

finden ist, aber nicht der des Primzahlsatzes für die arithmetische Progression. Der Autor hat sich wirklich Mühe gegeben, diese Beweise verständlich darzustellen. *K. Prachar*, Wien

Proceedings of the International Symposium on Algebraic Numbertheory. Gehalten in Tokyo und Nikko 1955. Herausgegeben von the Science Council of Japan. XXI, 267 S. Tokyo. 1956.

Die Internationale Mathematische Union hatte 1954 beschlossen, ein internationales Symposium über algebraische Zahlentheorie in Japan durchzuführen. Die Wahl fiel deshalb auf Japan, weil hier eine sehr große Anzahl von Mathematikern erfolgreich über algebraische Zahlentheorie arbeitet. Seit *Takagi* 1920 und 1922 seine grundlegenden Arbeiten über die Theorie der relativ Abelschen Zahlkörper und über das Reziprozitätsgesetz in beliebigen algebraischen Zahlkörpern schrieb, haben zahlreiche japanische Mathematiker wertvolle Beiträge zur algebraischen Zahlentheorie geleistet. Das im September 1955 in Tokyo und Nikko abgehaltene Symposium wurde von 64 Mathematikern besucht, von denen 54 aus Japan und die übrigen 10 aus Deutschland, Frankreich, Indien und USA stammten. Vor der Tagung fanden drei öffentliche Vorträge von *E. Artin*, *A. Weil* und *C. Chevalley* statt, die ins Japanische übersetzt und in japanischen Zeitschriften veröffentlicht wurden. Die für das Symposium eingereichten Arbeiten waren so zahlreich, daß nur ein Teil in vollem Umfang vorgetragen werden konnte. Bei der großen Anzahl der in dem Buch wiedergegebenen Vorträge kann keine Aufzählung erfolgen. Ich erwähne nur, daß sie nicht nur wertvolle Beiträge zur komplexen Multiplikation und zur Klassenkörpertheorie gebracht haben, sondern auch gezeigt haben, daß die Methoden der algebraischen Geometrie und der abstrakten Algebra mit großem Erfolg in der algebraischen Zahlentheorie verwendet werden können. *N. Hofreiter*, Wien

Lineare Algebra und lineare Analysis. Von *A. Lichnerowicz*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 28.) XI, 303 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956. DM 26.60.

Es ist sehr zu begrüßen, daß das vorliegende Buch nun auch in deutscher Übersetzung vorliegt. Es gliedert sich — sachlich gesprochen — in drei Teile: Lineare Algebra, Differentialformen, Funktionenräume. Die lineare Algebra bringt außer der üblichen Theorie eine ausführliche Darstellung der Tensorrechnung und äußeren Algebra, im zweiten Teil wird vor allem die Integration der äußeren Differentialformen und insbesondere der allgemeine *Stokes*sche Satz in Räumen beliebiger Dimension bewiesen. Allerdings unter einschränkenden Voraussetzungen, die aber für die Anwendungen vollkommen ausreichen. Der dritte Teil bringt Orthogonalsysteme von Funktionen, *Hilbert*räume, *Fourier*sche Reihen und Integrale, Operatorenrechnung und Integralgleichungen. Bei den Integralgleichungen benützt der Verfasser die Methode, die Kerne stets durch ausgeartete zu approximieren und erreicht dadurch eine große Eleganz der Beweise. Aus dieser vorliegenden Inhaltsangabe ersieht man, daß gerade die Dinge gebracht werden, welche der Mathematiker, Physiker und Ingenieur stets anzuwenden hat, und es wird auch sicher dazu beitragen, die bei uns noch nicht so geläufige Methode der äußeren Algebra und der äußeren Differentialformen auch den angewandten Mathematikern bekannt zu machen. Sind sie doch außerordentlich elegant und den üblichen Vektoroperationen bedeutend überlegen. Das Buch kann wärmstens empfohlen werden. *E. Hlawka*, Wien

Einführung in die höhere Mathematik. Von *H. v. Mangoldt* und *K. Knopp*. Zweiter Band. Zehnte, vollständig neubearbeitete Auflage. Mit 115 Textabb., XIV, 624 S. Leipzig: S. Hirzel. 1957.

Die Neubearbeitung auch des zweiten Bandes konnte sich auf wenige Änderungen und Umstellungen gegenüber der früheren Auflage beschränken; die vektorielle Schreibweise wird in weiterem Maß als bisher verwendet und einige Ergänzungen — wie der Überdeckungssatz — angefügt. — Vielleicht darf bei dieser Gelegenheit darauf hingewiesen werden, wie sehr dieses ausgezeichnete Werk in seiner klaren und deutlichen Schreibweise sich gerade zum Selbststudium eignet und auch den zahlreichen Ausländern an unseren Hochschulen immer wieder empfohlen werden kann. *H. Hornich*, Graz

Lezioni di Analisi Matematica. Von *F. Tricomi*. Siebente Auflage. I. Teil: XII, 381 S. L. 4200. — II. Teil: X, 360 S. L. 3800. Padova: Cedam, Casa Editrice Dott. A. Milani. 1956.

Obgleich beide Bände bereits in 7. Auflage erscheinen, hat sich der Verf. der Mühe unterzogen, manches neu zu gestalten. Die beiden Bände beinhalten lineare Algebra, algebraische Gleichungen, Differential- und Integralrechnung, etwas Funktionentheorie, ferner Differentialgeometrie der Kurven und Flächen, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen und etwas Variationsrechnung. Das Hauptgewicht liegt auf einer gründlichen und exakten Darlegung der Differential- und Integralrechnung. Die Darstellung ist ganz ausgezeichnet. Sie hält die richtige Mitte zwischen einer allzu abstrakten und daher schwer verständlichen Formulierung und einer hauptsächlich plausiblen und wenig exakten Gestaltung. So ist das Buch ein ideales Lehrbuch für Studierende der Universität. Als solches ist es gewiß seit langer Zeit nicht nur in Italien bekannt.

N. Hofreiter, Wien

Differentialrechnung einmal anders. Von *W. G. Boltjanski*. Mit 14 Textabb., IV, 60 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956.

Das kleine populär-wissenschaftliche Buch stellt eine Übersetzung aus dem Russischen dar. Der Autor bemüht sich, Schülern der oberen Klassen einiges aus der höheren Mathematik anschaulich zu erläutern. Dabei geht er stets von physikalischen Aufgaben aus. Es kommt dem Autor nicht auf exakte Beweisführung an, sondern es geht ihm darum, den Schülern Mathematik als eine nicht lebensfremde, sondern für die Anwendungen höchst bedeutungsvolle Wissenschaft darzustellen. *N. Hofreiter*, Wien

Advanced Calculus. Von *R. C. Buck*. (International Series in Pure and Applied Mathematics.) VIII, 423 S. New York — Toronto — London: McGraw-Hill Publishing Company, Ltd. 1956. $ 8.50.

Es dürfte in USA üblich sein, die Differential- und Integralrechnung zunächst in plausibler und wenig exakter Weise vorzutragen. Für jene Studenten, die eine weitere Ausbildung in der Mathematik anstreben, sind daher Vorlesungen und Lehrbücher notwendig, in denen 1. die Differential- und Integralrechnung exakt dargestellt wird und 2. die Differentiation und die Integration von Funktionen mit mehreren Variablen ausführlich durchgeführt wird. Beides trifft in dem vorliegenden Buch zu. Die Darstellung ist recht gut. Eigenartig ist die oft gleichzeitige Behandlung von Funktionen in einer und mehreren Variablen. Dies wird dadurch ermöglicht, daß Funktionen eines Punktes betrachtet werden.

Das Doppelintegral wird ausführlich behandelt, das einfache Integral ergibt sich nachher durch analoge Methoden. Hervorzuheben ist ferner die starke Betonung der Differentialformen. Viele, auch grundlegende Sätze werden in die Übungsaufgaben verlegt. Zu den meisten der 450 Aufgaben werden Lösungswege angegeben. *N. Hofreiter*, Wien

Cours de Mathématiques. Von *J. Bass*. Mit 359 Textabb., XI, 916 S. Paris: Masson et Cie., Editeurs. 1956. ffr. 7800, geb. ffr. 8500.

Das Problem, eine möglichst „vollständige" Einführung in die höhere Mathematik für Ingenieure zu geben, ist schwierig und auch nicht eindeutig lösbar. Mit dem vorliegenden Werk wird eine sehr gründliche Lösung dieses Problems geboten. Zwar erscheint der Umfang des Buches zunächst etwas groß; wenn man jedoch den riesigen Stoff näher betrachtet, wird man zugeben müssen, daß anderswo in drei und mehr Bänden auch nicht mehr geboten wird als hier in einem einzigen. Die Hauptteile des Buches sind: Lineare Algebra. — Einfache Integrale. — Funktionen, die durch Reihen und Integrale definiert sind. — Kurven, Kurvenintegrale und Anwendungen. — Flächen, mehrfache Integrale und Anwendungen. — Analytische Funktionen. — Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Potentialtheorie. Allerdings ist unter diesen Überschriften manches verborgen, das man dort nicht vermuten würde. So z. B. findet sich in einem Kapitel eine Darstellung der symbolischen Methode (Laplacetransformation) und in einem anderen Kapitel eine Einführung in die Variationsrechnung. Zahlreiche physikalische Anwendungen erläutern die Theorie und viele Übungsaufgaben erleichtern dem Leser das Verständnis. Ferner findet sich am Schluß ein Verzeichnis einiger Reihen und Integrale.

Alles in allem ein Buch, das dem Ingenieur manches an mathematischer Bildung verschafft, das er anderswo nicht so leicht finden wird. *K. Prachar*, Wien

Elements of Pure and Applied Mathematics. Von *H. Lass*. (International Series in Pure and Applied Mathematics.) XI, 491 S. New York — Toronto — London: McGraw-Hill Publishing Company, Ltd. 1957. $ 7.50.

Das Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der Autor in den letzten 16 Jahren an amerikanischen Universitäten gehalten hat. Es umfaßt 10 Kapitel, die nahezu ganz unabhängig voneinander lesbar sind. Die Auswahl des Stoffes erfolgte mit Rücksicht auf die Bedürfnisse des angewandten Mathematikers. Doch enthält das Buch vieles, was man darin nicht vermutet, wie die Elemente der Galoisschen Theorie. Was sonst in dem Buch steht, möge durch eine kurze Inhaltsangabe der 10 Kapitel angedeutet werden: 1. Lineare Algebra einschließlich der quadratischen Formen; 2. Vektoranalysis; 3. Tensorkalkül mit Anwendung auf die Riemannsche Geometrie, Hamiltonsche Gleichung, Navier-Stokessche Gleichungen der Hydrodynamik; 4. Elemente der Funktionentheorie, Gammafunktion; 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung, auch im komplexen Bereich, Laguerresche und Hermitesche Polynome; 6. Orthogonale Polynome, Fourier-Reihen und Fourier-Integrale; 7. Stieltjes Integral, Laplace-Transformation, Variationsrechnung; 8. Gruppentheorie, Auflösung algebraischer Gleichungen durch Radikale; 9. Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik; 10. Reelle Analysis, Zahlbegriff, Differentiation und Integration, unendliche Reihen. Es ist daraus zu ersehen, daß das Buch sehr inhaltsreich ist. Die Darstellung ist der Fassungskraft von Hochschülern in den mittleren Semestern angepaßt. Schwierige Beweise werden nicht gebracht. Es ist wohl einleuchtend, daß man lineare Algebra nicht auf 36 Seiten oder Funktionen-

theorie auf 50 Seiten oder Variationsrechnung auf 10 Seiten erlernen kann. Der Verfasser bemüht sich, auf wenigen Seiten eine Einführung in einen Zweig der Mathematik zu geben und verweist stets auf weiterführende Literatur. Jedes Kapitel bringt viele Beispiele und Aufgaben. *N. Hofreiter*, Wien

Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen. Von *A. I. Markuschewitsch.* (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik.) Mit 45 Textabb., 58 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956. DM 4.10.

In der Einführung werden die reellen Zahlen, ihre Darstellung durch gerichtete Strecken und die geometrische Deutung der Rechenarten mit diesen Zahlen besprochen. Es werden die komplexen Zahlen und das Rechnen mit ihnen auch in geometrischer Fassung eingehend behandelt und im Anschluß daran die konformen Abbildungen $z_1 = z^2$, $z_1 = \frac{z-a}{z-b}$, $z_1 = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ ausführlich dargelegt. Zehn Übungsaufgaben mit Lösungshinweisen beschließen das Bändchen. *J. Laub*, Wien

Randeigenschaften analytischer Funktionen. Von *I. I. Priwalow.* Zweite Auflage. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 25.) VIII, 247 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956. DM 29.60.

Das 1941 in erster Auflage erschienene Buch von *Priwalow* wurde jetzt von *Markuschewitsch* völlig neu bearbeitet und vielfach ergänzt; die zusammenfassende Darstellung von zahlreichen einschlägigen Arbeiten vornehmlich russischer Mathematiker und die Übersetzung des Buches ist sehr dankenswert. — Nach einer kurzen Einführung werden zunächst die durch ein Poisson-Stieltjessches Integral darstellbaren harmonischen Funktionen gebracht, der Satz von *Fatou* und die Randeigenschaften der Blaschkeschen Funktionen. Die folgenden Untersuchungen gelten der von *F. Riesz* eingeführten Klasse H_δ von Funktionen im Einheitskreis (auf S. 53 muß es in (1 . 1 . 1) und (1 . 1 . 2 .) natürlich $<$ heißen). Hier sei nur etwa die Parameterdarstellung der Funktionen aus H_δ nach *Smirnow*, die Integraldarstellung der im Einheitskreis analytischen Funktionen nach *Wostrezow* und der anschließende Unmöglichkeitsbeweis von *Dawydow* hervorgehoben. Aus den folgenden Abschnitten über Funktionen in Gebieten mit rektifizierbaren Randkurven greife ich nur die Wiedergabe des interessanten Beispiels von *Keldych* und *Lavrentieff* und aus dem letzten Abschnitt über Eindeutigkeit analytischer Funktionen auf dem Rande die Konstruktion von *Lusin* und *Priwalow* von Funktionen mit verschwindenden Randwerten heraus. *H. Hornich*, Graz

Vorlesungen über Funktionalanalysis. Von *F. Riesz* und *B. Sz. Nagy.* XI, 481 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956. Geb. DM 32.20.

Dieses hervorragende Werk wurde 1952 von der Budapester Akademie in französischer Sprache herausgegeben und hat seither allgemeine Anerkennung gefunden. Es ist daher zu begrüßen, daß es nun auch in einer gediegenen deutschen Übersetzung vorliegt. Da eine ausführliche Würdigung der ursprünglichen Ausgabe bereits durch *J. Radon* in Bd. **57**, S. 92—93 (1953) dieser Zeitschrift gegeben wurde, genügt es jetzt, darauf zu verweisen. *K. Mayrhofer*, Wien

Die Differentialgleichungen der Technik und Physik. Von *W. Hort* und *A. Thoma.* Siebente Auflage. Mit 343 Textabb., XI, 582 S. Leipzig: J. A. Barth. 1956. DM 36.—, geb. DM 38.—.

Die siebente Auflage des bekannten Buches wurde gegenüber der letzten Auflage (vgl. die Rezension Monatsh. **58**, 219 (1954) nur um einige Kleinigkeiten — hauptsächlich Literaturhinweise — vermehrt. Dieses Werk, welches in glücklicher Weise eine Brücke zwischen Mathematik, Physik und Technik schlägt, wird für die Studierenden aller dieser Richtungen weiterhin unentbehrlich sein. *K. Prachar*, Wien

Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben. Von *I. N. Vekua*. (Mathematische Forschungsberichte II.) 107 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956. DM 10.40.

Hier wird das System

$$u_x - v_y = a(x, y)\, u + b(x, y)\, v + f(x, y)$$

$$u_y + v_x = c(x, y)\, u + d(x, y)\, v + g(x, y)$$

und speziell die Randwertaufgabe $\alpha\, u + \beta\, v = \gamma$ untersucht; der Zusammenhang mit der Funktionentheorie ist naheliegend und wird mit Benutzung einer schon von *Pompeiu* verwendeten Differentiation nach z hergestellt, was sofort auf eine Integralgleichung führt. Anwendungen auf die Theorie der elastischen Schalen. Speziell werden Systeme mit in x, y analytischen Koeffizienten behandelt. *H. Hornich*, Graz

Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. Von *G. Doetsch*. Mit 12 Textabb., einem Tabellenanhang von *R. Herschel*, 198 S. München: R. Oldenbourg. 1956. DM 22.—.

Der Autor kommt mit diesem Buch dem Wunsch der Praktiker nach, eine Anleitung über Laplace-Transformation zu geben, die auf ihre Bedürfnisse zugeschnitten ist. Wer sich mehr theoretisch orientieren will, möge zum „Handbuch der Laplace-Transformation" des Autors greifen. In dem vorliegenden Buch werden vom Leser nur einige Kenntnisse aus der Funktionentheorie vorausgesetzt. Die Darstellung ist sehr gut verständlich und dürfte Physikern und Ingenieuren sehr zusagen. An zahlreichen der Technik entnommenen Beispielen wird das Verfahren eingeübt und schließlich die routinemäßige Beherrschung des Kalküls erreicht. An Schemen wird der Rechenvorgang illustriert. Zunächst wird die gegebene Gleichung (gewöhnliche oder partielle Differentialgleichung, Differenzengleichung, Integralgleichung) vermittels der Laplace-Transformation vom Originalraum in den Bildraum übersetzt. Dann wird die entstehende Bildgleichung gelöst. Der letzte Schritt besteht in der Berechnung der Originalfunktion, die zu der gefundenen Bildfunktion gehört. Bei jeder passenden Gelegenheit weist der Autor auf die Vorzüge der Laplace-Transformation gegenüber den klassischen Methoden hin. Bei der Laplace-Transformation werden die Anfangswerte von vornherein berücksichtigt und in die Lösung eingeführt. Die Auflösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen wird auf die Auflösung von algebraischen Gleichungen zurückgeführt. Die Auflösung von partiellen Differentialgleichungen wird auf die Auflösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt. Der Autor ist stets bemüht, vor Fehlern zu warnen und benutzt die Gefahrenzeichen der Straßenverkehrsordnung, was auf die Leser bei der heutigen starken Motorisierung sehr einprägsam wirkt. Der Anhang enthält eine Tabelle mit mehr als 300 Formeln von korrespondierenden Funktionen. Sie sind unter dem Gesichtspunkt der praktischen Anwendung der Laplace-Transformation zusammengestellt worden und stellen eine wertvolle Hilfe für den praktischen Rechner dar. *N. Hofreiter*, Wien

Hyperbelfunktionen. Von *W. G. Scherwatow.* (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik.) Mit 39 Textabb., 53 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956. DM 3.80.

Mit Hilfe der Affinität wird der Begriff der hyperbolischen Drehung entwickelt. Mit diesem Begriff der Drehung lassen sich — wie ausgeführt wird — verschiedene Sätze über die gleichseitige Hyperbel beweisen. Unter Verwendung des Einheitskreises bzw. der Einheitshyperbel werden die Kreis- und Hyperbelfunktionen einander gegenübergestellt, ihre Additionstheoreme abgeleitet und miteinander verglichen. Es wird auf den Zusammenhang hingewiesen, der zwischen dem natürlichen Logarithmus und dem Flächeninhalt eines teilweise krummlinig begrenzten Trapezes besteht, das mit der Einheitshyperbel eng verbunden ist. Das letzte Kapitel enthält Rechnungen, die schließlich zur Darstellung der Kreis- sowie der Hyperbelfunktionen mit Hilfe von e-Potenzen führen. *J. Laub*, Wien

Darstellende Geometrie. Von *H. v. Sanden.* Vierte bis siebente Auflage. (Teubners Mathematische Leitfäden: Band 2.) Mit 125 Textabb., 115 S. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1956. DM 7.80.

Dieses Buch wurde anläßlich seiner ersten Auflage bereits in den Monatsheften für Mathematik **39** (1932) besprochen. Von der vierten Auflage an ist als neuntes Kapitel die Perspektive mit geneigter Bildebene hinzugekommen. Für alle bisherigen Auflagen dieses Buches gilt das, was bereits in der Besprechung zur ersten Auflage betont worden ist: Der Verfasser ist bestrebt, an Hand von meist technischen Beispielen zu einem lebendigen Körpervorstellungsvermögen zu führen, ohne viel abstrakt-geometrische Systematik zu betreiben.

J. Laub, Wien

Darstellende Geometrie. III: Axonometrie und Perspektive. Von *W. Haack.* (Sammlung Göschen: Band 144.) Mit 100 Textabb., 125 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1957. DM 2.40.

Den beiden Bändchen I und II, die bereits in den Monatsheften für Mathematik **58** (1954) besprochen wurden, ist nun das Bändchen III gefolgt. Es werden die bekannten, für die normale Axonometrie geltenden Relationen abgeleitet, die Handhabung des Eckartschen Einschneideverfahrens kurz dargelegt. Drehzylinder, Drehkegel und Kugel in Verbindung mit ebenen Schnitten und einfachen Durchdringungen dargestellt. Dabei wurden die im Normblatt DIN 5 vorgeschlagenen Verkürzungsverhältnisse für die Achsenrichtungen vornehmlich verwendet. Schattenkonstruktionen werden bewußt nur in einfachen Fällen an ebenflächigen Körpern, an Drehkegel und Drehzylinder ausgeführt. Auf die schiefe Axonometrie wird nur kurz hingewiesen; der Beweis des Satzes von *Pohlke* wird in der Schwarzschen Fassung in den Hauptzügen angegeben. In den Abschnitten II—V wird die Perspektive behandelt. Nach ausführlicher Behandlung der Grundzüge der Perspektive, wie z. B. Umlegung der Grundebene, Verwendung der Meßpunkte, der Teilfluchtpunkte und der Teilmeßpunkte, folgt die Darstellung ebenflächiger Körper. Das perspektive Bild des Kreises wird ausführlich besprochen, hierauf die perspektive Darstellung des Drehzylinders und der Kugel ausgeführt. Auch in der Perspektive sind die Schattenkonstruktionen maßvoll begrenzt. Dieses Bändchen präsentiert sich, wie seine beiden Vorgänger, in einer ansprechenden Form. *J. Laub*, Wien

Cours de géométrie différentielle locale. Von *J. Favard.* (Cahiers scientifiques: Fasc. XXIV.) Mit 45 Textabb., VIII, 553 S. Paris: Gauthier-Villars. 1957. ffr. 6000.

Diese Darstellung der Differentialgeometrie bietet einen vorzüglichen Überblick einerseits über die schönsten Ergebnisse der klassischen Betrachtungsweise der Differentialgeometrie, andererseits über moderne Methoden und Fragestellungen, wobei — was französische Bücher sehr oft auszeichnet — der Kalkül stets nur Hilfsmittel bleibt. Eine Einleitung, die bei einer ersten Lektüre auch überschlagen werden könnte, bringt eine prägnante Zusammenfassung grundlegender geometrischer Begriffsbildungen, unter anderem eine Behandlung der für die Differentialgeometrie wichtigen Transformationsgruppen, eine Einführung in die Tensorrechnung und das *Cartan*sche Kalkül; beide Kalküle werden im Laufe des Buches neben der klassischen Methode der quadratischen Differentialformen in der Flächentheorie verwendet. Nach einer kurzen Darstellung der Theorie der Berührungen, der Einhüllendenbildung und der Berührtransformationen folgt die Behandlung der Differentialgeometrie im metrischen, affinen und projektiven Raum. Hier findet sich auch eine kurze Differentialgeometrie der Strahlgebilde, während die Zusammenhänge zur Variationsrechnung und sonstige Fragen, die zur Differentialgeometrie im Großen überleiten, unbeachtet bleiben. Ein letzter Abschnitt ist Zusammenhangsproblemen gewidmet, wobei vor allem der affine und metrische Zusammenhang untersucht wird. Nach Erwähnung der *Eddington*schen und *Weyl*schen Metrik wird der *Riemann*sche Raum etwas ausführlicher dargestellt. Jedem Kapitel ist eine Reihe von Aufgaben beigefügt, die wohl zum größten Teil als Ergänzungen des Stoffes anzusprechen sind; leider fehlen Literaturhinweise fast vollständig.

Dieses Buch beweist aufs Neue, daß auch heute noch eine geschickte Darstellung der klassischen Gebiete der Differentialgeometrie (eventuell unter Verwendung moderner Kalküle), um so mehr, wenn sie Ausblicke auf aktuelle Fragestellungen enthält, ihre volle Berechtigung besitzt und für Anfänger und Kenner wertvoll und interessant ist. *H. Brauner*, Wien

Die nichteuklidischen Geometrien und ihre Beziehungen untereinander. Von *E. Roeser.* Mit 91 Textabb., 233 S. München: R. Oldenbourg. 1957. DM 25.—.

Dieses sich vornehmlich auf die zweidimensionalen nichteuklidischen Geometrien beschränkende Buch gliedert sich in zwei methodisch verschiedene Teile; der erste Teil ist für den mathematisch interessierten Nichtfachmann geschrieben und zeigt, wie drei verschiedene Formulierungen des Parallelenaxioms zu drei nebeneinander stehenden, gleichberechtigten Geometrien führen. Diese werden, ausgehend vom Problem der Abstandslinie, durch Diskussion einer gewissen Funktionsgleichung gewonnen. Dabei kommt das konforme Modell der nichteuklidischen Geometrien überhaupt nicht und das projektive Modell nur ganz am Rande zur Sprache.

Der zweite Teil bringt vornehmlich neue Gedanken des Verfassers und enthält Überlegungen und Beweise in strenger und ausführlicher Form. Er ist dem Zusammenhang zwischen den drei Geometrien gewidmet. Obwohl eine gleichzeitige Entwicklung der drei Geometrien nur in einem Raum einer um eins höheren Dimension erfolgen kann, wird doch der euklidische Raum in keiner Weise vor den nichteuklidischen Metriken bevorzugt. Vielmehr wird, im Gegensatz zur üblichen Anschauung als Darstellungsraum der hyperbolische Raum gewählt, weil in ihm alle drei ebenen Geometrien ohne störenden Singularitäten realisierbar sind. Die Kugel dient dabei als Modell der sphärischen, die Abstands-

fläche als Modell der hyperbolischen und die Grenzfläche als Modell der euklidischen Geometrie. Dieser Weg ist wohl etwas mühsamer als der nach *Cayley* und *Klein* übliche, vermeidet aber die Interpretation nichteuklidischer Begriffe durch Zurückgreifen auf euklidische. *H. Brauner*, Wien

Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Band I: Theory of Statistics. Herausgegeben von *J. Neyman*. VIII, 208 S. Berkeley and Los Angeles: University of California Press. 1956. $ 6.—.

Der vorliegende Band dokumentiert in ausgezeichneter Weise die Fülle interessanter Probleme, welche derzeit in der modernen mathematischen Statistik vorliegen. Wir wollen dies an Hand einer kurzen Charakteristik der einzelnen Beiträge dartun. — *J. Berkson* untersucht im Anschluß an seine früheren Untersuchungen insbesondere im Zusammenhang mit den Fragen der Bio-Auswertung die Wirksamkeit des Maximum Likelihood (M. L.) Prinzipes, der Methode der kleinsten Quadrate und der Chiquadrat-Methoden, wobei auch einiges Licht auf das auf *Neyman* zurückgehende Prinzip der besten regulären asymptotisch normalen Schätzungen fällt. — Einerseits von den eben erwähnten Untersuchungen *Neymans* andererseits von der bekannten Arbeit *Walds* über das asymptotische Verhalten von M. L.-Schätzungen ausgehend, gibt *L. Le Cam* eine recht tief eindringende Theorie der Asymptotik der Schätzungen und des Testens. Verwandte Resultate hat der Autor schon früher erzielt. Die hier gegebenen Sätze betreffen insbesondere konsistente und asymptotisch erschöpfende Schätzungen sowie Fragen der asymptotischen Normalität unter schwachen Voraussetzungen. Darüber hinaus werden die Ergebnisse in den Rahmen der allgemeinen Entscheidungstheorien eingebaut. — Die Arbeit von *H. Chernoff* und *H. Rubin* geht von der bekannten Tatsache aus, daß sich z. B. der Lokalisierungsparameter einer Rechteckverteilung „besonders gut" schätzen läßt und stellen dann allgemeiner das Problem der Schätzung einer Unstetigkeitsstelle einer Schar von Dichten. Der allgemeine Fall läßt sich mittels des M. L.-Prinzipes unter Benützung der üblichen Regularitätsvoraussetzungen angreifen. Die Frage der asymptotischen Verteilung der Schätzfunktionen wird in Zusammenhang mit einem Zufallswegproblem gebracht und studiert. Zum Teil wurden die Hilfsmittel schon früher von *Chernoff* bereitgestellt. — Fragen bei nichtparametrischen Verfahren sind die Beiträge von *Z. W. Birnbaum* und *B. L. van der Waerden* gewidmet, und zwar beschäftigt sich der erstgenannte Autor insbesondere mit der Konstruktion von Konfidenzintervallen für den erwarteten Wert der Testgröße von *Wilcoxon*. Er benützt hiezu nicht die übliche Approximation durch die Normalverteilung, sondern die Sätze von *Kolmogoroff* und *Smirnoff*. *Van der Waerden* gibt Hinweise auf die Berechnung der Tafeln für den von ihm entwickelten X-Test. Diese sind inzwischen erschienen. (Vgl. Mh. **60** (1956), 346). Zu den Untersuchungen über nichtparametrische Verfahren kann man auch die Arbeiten von *A. Dvoretzky* und *J. L. Hodges Jr.* und *E. L. Lehmann* rechnen, die sich mit dem Verfahren von *Robbins-Monro* beschäftigen. Überdies betrachten die beiden Autoren *Hodges* und *Lehmann* das Verfahren auch für gewisse parametrische Fälle. *Dvoretzky* schält den Kern der stochastischen Approximationsverfahren heraus und gibt in diesem Zusammenhang ein allgemeines Konvergenztheorem, das auf andere Weise auch von *J. Wolfowitz* bewiesen wurde. *Dvoretzkys* Arbeit vermittelt einen Einblick in die Zusammenhänge zwischen stochastischen und gewöhnlichen Approximationsverfahren. — Die Beziehungen zwischen der Wirksamkeit nichtparametrischer und parametrischer Methoden betrifft die Arbeit von *C. Stein*. Es wird hiezu (zum Teil heuristisch)

an typischen Beispielen gezeigt, daß man in manchen Fällen auch bei Erweiterung einer Klasse unbekannter Verteilungen durch einen Parameter dieselbe asymptotische Wirksamkeit erreichen kann. Hiezu dient insbesondere ein einfaches algebraisches Lemma, welches auf die Informationsmatrizen angewendet wird. — *W. Hoeffding* studiert das auch praktisch wichtige Problem, inwiefern die „Optimalität" einer Entscheidungsfunktion erhalten bleibt, wenn man die Klasse der zu Grunde liegenden Verteilungen modifiziert. In diesem Zusammenhang wird auch das von *Berger* und *Wald* eingeführte Konzept der unterscheidbaren Klassen von Verteilungen untersucht und zur sequentiellen Unterscheidbarkeit erweitert. — In einer weiteren Arbeit betrachtet *C. Stein* die Schätzung der Mittelwerte n unabhängiger Normalverteilungen und beweist, daß für $n \geqq 3$ die übliche Schätzung bei Zugrundelegung der gewöhnlichen quadratischen Verlustfunktion nicht zulässig ist. Es wird vielmehr gezeigt, daß sphärisch symmetrische Schätzungen, die gegenüber orthogonalen Transformationen invariant bleiben, zulässig Schätzungen liefern. Auf Beziehungen zu den Untersuchungen von *Karlin* über „Faltungsspiele" wird hingewiesen. — Der Beitrag von *Karlin* liegt in Richtung der früheren interessanten Betrachtungen über Verteilungen mit monotonen L.-Quotienten, die der Verf. gemeinsam mit *Rubin* angestellt hat. In der damaligen Arbeit wurden Ergebnisse über *Bayes*sche Strategien und vollständige Klassen von Strategien erzielt, jedoch unter einschneidenden Bedingungen für die Verlustfunktion. Diese werden hier wesentlich abgeschwächt, jedoch anderseits Verteilungen vom exponentiellen Typ und vom „*Polya*-Typ (Verallgemeinerung der positiven Funktionen) zu Grunde gelegt. — Angeregt durch seine früheren Untersuchungen studiert *H. Robbins* zunächst den klassischen Bayesschen Fall der Schätzung eines „Parameters". Unter anderem wird dann das interessante Problem gestellt, eine Folge von Funktionen der empirischen Stichproben-Randverteilung zu finden, welche mit wachsendem Stichprobenumfang gegen die unbekannte a priori-Verteilung des Parameters konvergiert. Eine Behandlung dieser Frage und Heranziehung der Minimumdistanz Methode von *Wolfowitz* wird angedeutet. — Berührungspunkte weisen die Beiträge von *G. Elfing* und *S. Ehrenfeld* auf. *Elfings* Untersuchungen liegen in Richtung seiner vorangehenden Arbeiten über optimale Zuteilung (alocation) und lassen sich in der Sprache der Faktorenanalyse als optimale Schätzung einer Linearform der gemeinsamen Faktoren mittels einer Teilmenge von Ergebnissen aus Testfragen kennzeichnen. Die klassische Methode von *Neyman-Pearson* dient dem Verf. als Vorbild zur Behandlung des sich ergebenden Variationsproblems. *Ehrenfeld* stellt sich die Aufgabe, eine Menge von Linearformen T über den Regressionskoeffizienten zu schätzen und wesentlich vollständige Klassen von Experimenten zu suchen, wobei Minimalstreuung, gleichmäßig in T, auszeichnendes Prinzip ist. Eingehend wird der Fall betrachtet, daß die Menge der die Experimente beschreibenden Vektoren kompakt ist. — Schließlich sind zwei Arbeiten über die statistische Analyse stationärer Zeitreihen von *U. Grenander* und *M. Rosenblatt* zu erwähnen, welche die Spektraltheorie und Regressionsprobleme betreffen. Eine gesamte Darstellung ist inzwischen in dem Buch der beiden Autoren niedergelegt worden. *L. Schmetterer*, Hamburg

Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Band V: Econometrics, Industrial Research, and Psychometry. Herausgegeben von *J. Neyman*. VIII, 184 S. Berkeley and Los Angeles: University of California Press. 1956.

Die Arbeiten zur Ökonometrik stammen von *K. J. Arrow* und *L. Hurwicz*, *E. W. Barankin*, *C. W. Churchman*, *P. Suppes*. Die ersten beiden Autoren setzen

Untersuchungen von *Kuhn* und *Tucker* fort, welche die *Lagrange*sche Methode auf Sattelpunktsprobleme anwenden. Die anderen Beiträge werfen Grundlagenprobleme auf und kreisen um die Begriffe Wahrscheinlichkeit, Nutzenfunktion, Theorie der Entscheidungen und vernünftiges Verhalten (rational behavior). Die umfangreichen Untersuchungen von *Barankin* sind mathematisch darauf gegründet, daß anstelle einer Punkt-Nutzenfunktion eine Mengen-Nutzenfunktion eingeführt wird. Der Autor erklärt, was man unter einem „Persönlichkeitsprozeß" (personality process) (abgek. p. p.), versteht, und zwar beruht dieser auf den Begriffen individuelles Verhalten und dessen Motivierung, dem „Persönlichkeitsstreben" (personality strain) (abgek. p. s.). Bei der mathematischen Formulierung kommt es darauf hinaus, daß das p. s. als Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen erklärt wird, wobei die Maße die Nutzenfunktionen darstellen. Im wesentlichen laufen dann ein p. p. und ein stochastischer Prozeß auf dasselbe hinaus. Die Feststellungen gipfeln in dem Satz, daß das ganze Sein ein stochastischer Prozeß ist. Es ist hier nicht der Ort, sich mit diesen interessanten Untersuchungen auseinander zu setzen, doch scheint es dem Referenten fraglich, ob man zur Zeit schon an eine Formalisierung eines Begriffs wie das p. s. denken kann. Hierzu bedarf es doch noch eines wesentlichen Fortschritts der Psychologie. Ob man hierbei stets vom Begriff einer Nutzenfunktion auszugehen hat, sei ebenfalls dahingestellt. Das ökonomische Denken hat jedenfalls hier allzu deutliche Spuren hinterlassen. Die Ausführungen von *Churchman* über Entscheidungstheorien und Induktion kann man wohl kurz durch den Satz kennzeichnen: Jede Theorie, die man anwendet, bedarf experimenteller Verifizierung. „Statements made about „rationality" and „optimality" of decisions are premature". Ich glaube, daß die meisten diesen Ausführungen beipflichten werden. *Suppes* entwirft nach dem Vorbild von *Savage* eine subjektive Entscheidungstheorie.

Die Vorträge von *A. H. Bowker, C. Daniel, M. Sobel* sind statistischen Fragen in der Industrie gewidmet. Der erstgenannte Autor beschäftigt sich mit der Qualitätskontrolle und gibt eine gute Übersicht über die bisher propagierten Stichprobenpläne. *Daniel* berichtet über die Methode der teilweise wiederholten Versuche (fractional replication). *Sobel* verallgemeinert ein Verfahren von *Birnbaum* und entwickelt eine sequentielle Methode zur Auswahl einer bestimmten aus $k \geqq 2$ exponentiell verteilten Grundgesamtheit. Der Verfasser hat sich ja zum Teil in Zusammenarbeit mit anderen Autoren schon vielfach mit ähnlichen Problemen beschäftigt.

T. W. Anderson und *H. Rubin, F. Mosteller, H. Solomon* beschäftigen sich mit dem im Titel zuletzt genannten Gebiet. Der erste Artikel gibt eine außerordentlich klare Übersicht über die statistischen Methoden in der Faktorenanalyse. Da sich viele Darstellungen oft nur im Zusammenhang mit weitergehenden Kenntnissen aus der Psychologie verstehen lassen, muß die besondere Durchsichtigkeit der vorliegenden Arbeit eigens hervorgehoben werden. *Mosteller* berichtet über stochastische Modelle des Lernens. Dem Kenner des Buches von *Bush* und dem Verfasser werden diese Dinge vertraut sein (vgl. die Besprechung des Buches in den Monatsh. f. Math. 60, 89 (1956). Der Band schließt mit *Solomons* Beitrag über die Testaufgabenanalyse. *L. Schmetterer*, Hamburg

Introduction to Operations Research. Von *C. W. Churchman, R. L. Ackoff* und *E. L. Arnoff*. X, 645 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. — London: Chapman & Hall, Ltd. 1957. $ 12.—.

Operations Research oder „Unternehmensforschung" ist ein Gebiet, in dem mathematische Methoden nur langsam an Bedeutung gewinnen. Dementspre-

chend ist das vorliegende Werk eine Mischung von verschiedenen noch etwas heterogenen Entwicklungen, welche von guten Ratschlägen und praktisch bewährten Überlegungen, bei denen nur die vier Grundrechnungsarten zum Einsatz kommen, bis zu verschiedenen schwierigeren mathematischen Theorien reichen. Von den letzteren seien z. B. nur erwähnt die „Waiting Time Models", zu deren Beschreibung verschiedene Differentialgleichungen benötigt werden, sowie die Theorie des „Linear Programming" („Lineare Planung") und die Theorie der Spiele. Durch diese Vielfalt der behandelten Probleme wirkt das Buch ungemein anregend. So mancher Leser wird vielleicht dazu geführt werden, die Anwendbarkeit mathematischer Methoden auf das eine oder andere Problem selbst zu versuchen. Wir geben noch die Überschriften der einzelnen Teile des Buches: Introduction. — The Problem. — Inventory Models. — Allocation Models. — Waiting Time Models. — Replacement Models. — Competitive Models. — Testing Control and Implementation. — Administration of Operations Research.

K. Prachar, Wien

Models of Man. Von *H. A. Simon*. XIV, 287 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1957. $ 5.—.

Das Buch enthält sechzehn Arbeiten, die der Verfasser innerhalb der letzten zehn Jahre in verschiedenen Zeitschriften veröffentlicht hat. In diesen Arbeiten werden verschiedene Probleme auf dem Gebiet der Gesellschaftswissenschaften mit mathematischen Methoden untersucht oder aus diesen Problemen sich ergebende mathematische Fragen behandelt. Die einzelnen Aufsätze sind auf geschickte Art in vier Abschnitten zusammengefaßt; vor jedem dieser Abschnitte gibt eine Einleitung einen Überblick über seinen Inhalt und die Zusammenhänge zwischen seinen Teilen. So ist ein doch ziemlich einheitliches Werk entstanden, das interessante Einblicke in das weite Gebiet der modernen Sozialwissenschaften gewährt und außerdem in sehr lehrreicher Weise zeigt, wie vorteilhaft die Verwendung der Mathematik für dieses Gebiet ist, aber auch, wie große Schwierigkeiten hier bei der mathematischen Erfassung der Begriffe und Gesetzmäßigkeiten manchmal auftreten.

Der erste Teil des Buches beschäftigt sich vor allem mit der exakten Definition und Messung des „Einflusses", der von Personen aufeinander ausgeübt wird; man wird hier zu mathematischen Problemen geführt, die mit dem statistischen Identifikationsproblem in engem Zusammenhang stehen. Sehr interessant ist der Aufsatz über die Auswirkungen von Vorhersagen über ein Wahlergebnis auf den Ausgang der Wahl. Im zweiten Teil werden die Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Mitgliedern von Personengruppen studiert, und zwar wird so eine Personengruppe als dynamisches System betrachtet und durch dieses Modell ihr Verhalten beschrieben; es werden einige derartige Modelle aufgestellt. Der dritte Teil untersucht die Beweggründe, welche eine Person zum Eintritt und zur Mitgliedschaft bei einer Organisation, insbesondere zur Annahme eines Arbeitsverhältnisses, veranlassen und entwirft auch ein neuartiges mathematisches Modell der Arbeitgeber-Arbeitnehmer-Relation. Im vierten Teil wird hauptsächlich die Frage behandelt, für welche von verschiedenen möglichen Verhaltensweisen sich eine Person entscheiden wird. Dabei wird — im Gegensatz zu der statistischen Entscheidungstheorie oder der Theorie der Spiele — Rücksicht genommen auf die Beschränktheit der menschlichen Einsicht: Diese hat zur Folge, daß nicht die objektiv beste Verhaltensweise gewählt wird, sondern eine solche, die der vor die Entscheidung gestellten Person „gut genug" erscheint.

Ohne Zweifel bilden die Untersuchungen dieses Buches einen bedeutsamen Beitrag zur Weiterentwicklung und Vereinheitlichung der Sozialwissenschaften.

W. Nöbauer, Wien

Mathematical Tables. Band 1: The Use and Construction of Mathematical Tables. Von *L. Fox*. IV, 60 S. London: Her Majesty's Stationery Office. 1956. 17 s. 6 d.

Es ist geplant, eine Reihe von mathematischen Tafeln herauszugeben. Band I dient als Einführung. Er berichtet über die Anlage der mathematischen Tafeln, ihren Gebrauch und über die Methoden, die man zur Herstellung der Tafelwerte benutzt. *N. Hofreiter*, Wien

Tabellen zur Fourier Transformation. Von *F. Oberhettinger*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 90.) X, 214 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. DM 35.80, geb. DM 39.50.

Das Buch enthält eine Sammlung von rund 1800 Integralformeln der folgenden Form:

$$(1) \qquad g(y) = \int_0^\infty f(x) \cos(xy)\, dx,$$

$$(2) \qquad g(y) = \int_0^\infty f(x) \sin(xy)\, dx,$$

$$(3) \qquad g(y) = \int_0^\infty f(x)\, e^{ixy}\, dx.$$

Die Einteilung erfolgt klarerweise nach $f(x)$ (algebraische Funktionen, Exponentialfunktionen, logarithmische Funktionen, trigonometrische Funktionen, zyklometrische Funktionen, hyperbolische Funktionen, Kugelfunktionen, Zylinderfunktionen und noch einige weitere transzendente Funktionen). Die ungeheure Arbeit des Autors, die in der Berechnung der Integrale und in den umfangreichen Kontrollen bestand, kann wohl nur der richtig beurteilen, der selbst schon Integraltafeln herausgegeben hat. *N. Hofreiter*, Wien

Tables of Legendre Polynomials. Von *G. C. Clark* und *St. W. Churchill*. IX, 92 S. Ann Arbor, Mich.: The University of Michigan Press. 1957. $ 4.50.

Bei vielen Problemen der mathematischen Physik treten Kugelfunktionen auf. Das Buch bringt Tafeln von $P_n(\cos\theta)$ für $n = 0, 1, \ldots, 80$; $\theta = 0^0, 1^0, \ldots, 180^0$. Die Werte werden auf 6 Dezimalen angegeben und wurden mit elektronischen Rechenmaschinen (MIDAC) ermittelt. *N. Hofreiter*, Wien

Recent Advances in Science. Physics and Applied Mathematics. Von *M. H. Shamos* und *G. M. Murphy*. Mit 170 Textabb. und 23 Tafeln, XII, 384 S. New York-London: Interscience Publishers, Inc. 1956. $ 7.50.

Während des Frühlings 1954 wurde an der Universität von New York eine Vortragsreihe über neuere Fortschritte in der Physik und in der angewandten Mathematik veranstaltet, an der 225 Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen aus der Industrie und von den Hochschulen teilnahmen und deren Zweck es war, die Teilnehmer mit den neuesten Ergebnissen gewisser Spezialgebiete der genannten Wissenschaften bekanntzumachen. Das Niveau der Vorträge, die durch-

wegs von bekannten Spezialisten gehalten wurden, war so abgestimmt, daß die Vorträge auch Nichtspezialisten verständlich sein sollten, wenn auch sicherlich die Spezialisten der betreffenden Teilgebiete die meisten Anregungen und den größten Gewinn aus ihnen gezogen haben dürften. Der Platzmangel gestattet nur eine Aufzählung der Vorträge: *R. Courant:* Methoden der angewandten Mathematik; *Ph. M. Morse:* Die Zukunft der Operationenuntersuchungen; *I. I. Rabi:* Atombau; *C. H. Townes:* Mikrowellenspektroskopie; *H. A. Bethe:* Kernbau und Kernumwandlungen; *V. F. Weisskopf:* Elementarteilchen; *L. J. Haworth:* Teilchenbeschleuniger; *N. F. Ramsey:* Neutronenphysik; *W. Shockley:* Transistorphysik; *R. M. Bozorth:* Ferromagnetismus; *F. G. Brickwedde:* Kältephysik; *E. U. Condon:* Die Physik und der Ingenieur.

Für die Qualität der Vorträge bürgt der Name der Verfasser. Druck und Ausstattung des Buches sind einwandfrei. *Th. Sexl*, Wien

Theoretische Physik. Eine Einführung. Von *F. Hund.* Band I: Mechanik. Vierte, überarbeitete Auflage. Mit 128 Textabb., VIII, 200 S. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1956. DM 16.80, geb. DM 18.80.

Die Einführung in die theoretische Physik des gleichen Verf. erschien nach 1945 in erster Auflage in fünf Bänden (Mechanik, Elektrizität, Optik, Wärmelehre, Quantentheorie). Als zeitlich erster Band der Neubearbeitung des Gesamtwerkes legte der Verf. im Frühjahr 1956 den III. Band vor, der die früheren Bände 4 (Wärmelehre) und 5 (Quantentheorie) in einen einzigen zusammenfaßte. Ihm folgt jetzt als zeitlich zweiter Band der vorliegende Band I über Mechanik. Band II, der die früheren Bände 2 (Elektrizität) und 3 (Optik) zusammenfaßt, soll in Kürze nachfolgen. Sollte es bei diesem Programm bleiben, dann wird allerdings im Gesamtwerk die Elastizitätstheorie und die Hydrodynamik fehlen. Es dürfte also unumgänglich notwendig sein, das Gesamtwerk entweder durch einen Band IV (Kontinuumsmechanik) zu ergänzen oder in der sicher zu erwartenden Neuauflage des Gesamtwerkes den Umfang des vorliegenden Bandes I zu verdoppeln.

Die Darstellung des vorliegenden I. Bandes behandelt in einer als Einführung gedachten Form die Punktmechanik einschließlich des starren Körpers und die allgemeinen Prinzipe der Mechanik. Nach einer Darlegung der Statik, in der sich auch ein Paragraph über Vektorrechnung befindet (wobei für das vektorielle Produkt zweier Vektoren das $\times$-Zeichen der Mathematiker benützt wird, abweichend von den Lehrbüchern von *G. Joos* und *Cl. Schaefer*, die das Symbol [ ] für das gleiche Produkt verwenden), folgt die Erörterung der eindimensionalen Bewegung eines einzelnen Massenpunktes, daran anschließend die dreidimensionale. Hierauf folgt die Behandlung eines Systems von Massenpunkten, die Bewegung des starren Körpers und die formale Vollendung der Mechanik von Massenpunkten (Prinzip von *d'Alembert*, Lagrange'sche und kanonische Bewegungsgleichungen). Ein wissenschaftsgeschichtlicher Anhang schließt den Band ab.

Durch den Übergang des Werkes in den Teubnerschen Verlag hat der vorliegende Band, wie schon der vorausgegangene Band III, das normale Format, das dem Auge wohlvertraute Druckbild und den schönen Leineneinband der Teubnerschen Verlagswerke erhalten. Alle Studenten, denen die Einführung in die theoretische Physik von *Cl. Schaefer* zu umfangreich ist, werden gerne nach dem kürzeren so außerordentlich klar abgefaßten Werke von *Hund* greifen.

Th. Sexl, Wien

Mathematische Grundlagen der Quantenstatistik. Von *A. J. Chintchin.* 200 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1956. Geb. DM 21.—.

Der berühmte Verfasser läßt seinem Buch „Mathematische Grundlagen der statistischen Mechanik", welches sich mit der klassischen statistischen Mechanik beschäftigt, nun ein Buch über die „Quantenstatistik" folgen. Der Verfasser wendet in beiden Büchern die modernen Methoden der Theorie der Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung an. Dadurch wird eine einfache Begründung der statistischen Mechanik erreicht und in einem großen Zusammenhang eingeordnet. Es war nur notwendig zu berücksichtigen, daß es in der Quantenstatistik nicht nur eine Statistik gibt, sondern drei. Das Buch beginnt zunächst mit einer Darstellung der benötigten Grenzwertsätze, und zwar handelt es sich hier um lokale Grenzwertsätze. Es stellt dies eine der schönsten Einführungen in diese Theorie überhaupt dar. Dabei werden die Sätze noch durch genaue Abschätzung der dabei auftretenden Fehlerglieder vertieft. Dann folgt ein Abschnitt über die Grundlagen der Quantenmechanik und Quantenstatistik, was besonders begrüßenswert ist, wenn man sie mit den oft lückenhaften und irrigen Darstellungen in physikalischen Lehrbüchern vergleicht. Dann wird zuerst die Lichtquantenstatistik behandelt, welche ja die Besonderheit aufweist, daß die Anzahl der Teilchen nicht konstant bleibt. Dann folgt die Theorie der Statistik materieller Teilchen mit der Anwendung auf die Thermodynamik. Das Buch wird abgeschlossen durch vier sehr wichtige Anhänge. Die Darstellung ist durchsichtig und sehr ausführlich; das Buch liest sich außerordentlich leicht. Es wendet sich vor allem an Mathematiker, kann aber auch Physikern sehr empfohlen werden. *E. Hlawka*, Wien

Mathematics and Wave Mechanics. Von *R. H. Atkin.* Mit Textabb., XV, 348 S. London-Melbourne-Toronto: W. Heinemann Ltd. 1956. 30 s.

Das vorliegende Buch stellt sich die Aufgabe, die mathematischen Hilfsmittel der Quantenmechanik in einer Form zu entwickeln, daß nur die mathematischen Vorkenntnisse eines Maturanten vorausgesetzt werden. Demgemäß ist über die Hälfte des Buches Themen gewidmet, die an einer Hochschule in den mathematischen Anfängervorlesungen über Differential- und Integralrechnung (Kap. I, II, IV), Vektorechnung und elementare Algebra (Kap. III), Differentialgleichungen (Kap. V) und in den einführenden Vorlesungen über theoretische Physik (Kap. VI, VII, VIII) behandelt werden. Vom IX. Kapitel angefangen werden die mathematischen Probleme der neuen Quantenmechanik in der *Heisenberg*schen und *Schrödinger*schen Fassung, hierauf verschiedene mathematische Probleme der Schrödingergleichung (Kap. X) und der Störungstheorie (Kap. XI) erörtert. Daran schließen sich Ausführungen über den Spin des Elektrons einschließlich der *Dirac*-Gleichung (Kap. XII), über Quantenchemie (Kap. XIII), über die neuen Statistiken (Kap. XIV) und in einem abschließenden XV. Kapitel über die Quantentheorie der Strahlung an.

Jedem Kapitel ist eine Reihe von Aufgaben zur Einübung des im Text behandelten Stoffes angeschlossen. Das Buch ist sehr einfach und klar geschrieben und wird von dem vorausgesetzten Leserkreis sicherlich wärmstens begrüßt werden. *Th. Sexl*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Das internationale wissenschaftliche Organ der Astronautik

ASTRONAUTICA ACTA

Offizielles Organ der Internationalen Astronautischen Föderation

Official Journal of the International Astronautical Federation

Organe Officiel de la Fédération Internationale d'Astronautique

Herausgegeben von Editorial Board Comité des Rédacteurs

W. v. BRAUN-Huntsville/Ala. - A. EULA-Roma - J. M. J. KOOY-Breda F. I. ORDWAY III-Huntsville/Ala. - E. SÄNGER-Stuttgart - K. SCHÜTTE-München - L. R. SHEPHERD-Chilton - J. STEMMER-Baden/Schweiz

Schriftleitung - Editor-in-Chief - Rédacteur en chef

F. HECHT-Wien

Die Zeitschrift erscheint vierteljährlich (1957: 3. Jahrgang)

Jahresbezugspreis S 216.—, DM 36.—, sfr. 37.20, $ 8.60

Ab 1957 erscheinen die „Astronautica Acta" bei unverändertem Bezugspreis im beträchtlich erweiterten Umfang von 256 Seiten pro Jahr. Trotz bedeutender Kostensteigerungen in den letzten Monaten hat sich der Verlag zu dieser Maßnahme entschlossen, um dem wachsenden Bedürfnis nach Veröffentlichung der immer zahlreicher einlaufenden wichtigen Beiträge entsprechen zu können.

Mitglieder der Internationalen Astronautischen Föderation (IAF) bzw. deren Mitgliedsgesellschaften können die Zeitschrift als das Organ der IAF zu einem um 20% ermäßigten Preis beziehen

Band III, Heft 1 (1957). *Inhaltsverzeichnis:* **Canney, H. E., Jr.,** and **F. I. Ordway, III,** The Uses of Artificial Satellite Vehicles. Part II. — **Klemperer, W. B.,** and **R. M. L. Baker, Jr.,** Satellite Librations. — **Kaeppeler, H. J.,** und **G. Baumann,** Über Systeme mit chemisch reagierenden Komponenten im Gleichgewicht. — **Hecht, F.,** und **R. Patzak,** Chemische Analyse von in Tiefseesedimenten gefundenen mikroskopischen Kügelchen vermutlich kosmischen Ursprunges. — **Cremona, C. E.,** Metodo fotografico per la determinazione della resistenza aerodinamica di missili in volo. — **Ordway, F. I., III,** Project Vanguard — Earth Satellite Vehicle Program. Characteristics, Testing, Guidance, Control, and Tracking.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

Die wissenschaftliche und angewandte Photographie

Erneuerung und Fortführung des Hay- v. Rohrschen Handbuchs der wissenschaftlichen und angewandten Photographie.

Herausgegeben von Dr. **Kurt Michel**, Aalen, Württemberg

Das von *A. Hay* begründete, später von *M. v. Rohr* weitergeführte und zum Abschluß gebrachte Handbuch der wissenschaftlichen und angewandten Photographie erfreute sich seinerzeit großen Ansehens. Der 1943 von *K. Michel* herausgegebene Ergänzungsband war rasch vergriffen. Den gegenwärtigen Bedingungen Rechnung tragend, haben sich Verlag und Herausgeber entschlossen, das Handbuch in in sich abgeschlossenen, einzeln käuflichen Monographien neu herauszugeben.

Soeben erschien:

Band X: **Die Mikrophotographie.** Von Dr. **Kurt Michel**, Aalen, Württemberg. Mit 550 teils farbigen Textabbildungen. XXXII, 740 Seiten. Gr.-8°. 1957. Ganzleinen S 840.—, DM 140.—, sfr. 143.40, $ 33.30

Das Mikroskop ist schon lange nicht mehr nur das Handwerkszeug einer kleinen Gruppe von Forschern. Es ist heute in praktisch jedem Laboratorium ein unentbehrliches Hilfsmittel und in sehr vielen Fällen spielt es auch bereits in der industriellen Fertigung eine wichtige Rolle. Zum Festhalten der Beobachtungsergebnisse bedient man sich in der Regel der photographischen Verfahren. Die Kombination von Mikroskopie und Photographie, die **Mikrophotographie**, hat sich zu einer wichtigen Technik entwickelt, und es wurde schon lange als schwerwiegender Mangel empfunden, daß seit beinahe 20 Jahren eine zusammenfassende systematische Darstellung dieses Gebietes in deutscher Sprache fehlt. Im vorliegenden Band unternimmt es ein seit langem bekannter Fachmann, der als Leiter der Abteilung für Mikroskopie der Firma *Carl Zeiss* mit den Geräten besonders vertraut ist, eine solche, den neuesten Stand berücksichtigende Darstellung zu geben. Der Band gliedert sich in drei Teile. Im ersten wird ein konzentrierter Überblick über die theoretischen Grundlagen der Mikroskopie und Mikrophotographie gegeben, ohne deren Kenntnis eine Beherrschung der Praxis immer Stückwerk bleiben muß. Der zweite Teil behandelt die Geräte und der dritte schließlich die mikrophotographischen Methoden. Die Ausführungen werden durch eine große Zahl zum überwiegenden Teil für das Buch eigens neu angefertigter Abbildungen erläutert.

Früher erschienen:

Band I: **Das photographische Objektiv.** Von Dr. *Johannes Flügge*, R. Winkel G.m.b.H., Optische Werke, Göttingen. Mit einem Beitrag von Physiker *Leo Bierwagen*, Göttingen. Mit 196 teils farbigen Textabbildungen. XIII, 373 Seiten. Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen S 414.—, DM 69.—, sfr. 70.70, $ 16.45

Band III: **Die kinematographische Kamera.** Von Dipl.-Ing. Dr.-Ing. *Harald Weise*, Köln. Mit 521 Textabbildungen. XVI, 472 Seiten. Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen S 478.—, DM 79.80, sfr. 81.70, $ 19.—

Band V: **Die Technik der Negativ- und Positivverfahren.** Von Dr. *Edwin Mutter*, Hamburg. Mit 91 Textabbildungen. XX, 396 Seiten. Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen S 396.—, DM 66.—, sfr. 67.50, $ 15.70